

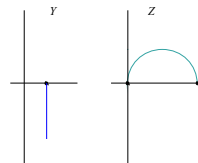
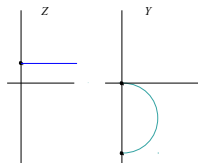
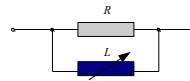
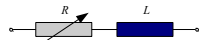
# Elektrotechnik

für den Studiengang Verfahrenstechnik,

1. Semester

**Dr. Jürgen Bolik**

*Technische Hochschule Nürnberg*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Grundbegriffe</b>	<b>4</b>
1.1	Elektrische Ladungen und Felder . . . . .	4
1.1.1	Elektrische Ladungen . . . . .	4
1.1.2	Das elektrische Feld . . . . .	5
1.2	Spannung und Potential . . . . .	8
1.3	Kapazität . . . . .	10
1.3.1	Kondensatoren . . . . .	10
1.3.2	Energieinhalt eines homogenen elektrischen Feldes . . . . .	14
1.4	Der elektrische Strom und Ohmsche Widerstand . . . . .	15
1.4.1	Stromstärke . . . . .	15
1.4.2	Der Ohmsche Widerstand . . . . .	16
1.5	Das magnetische Feld . . . . .	20
1.5.1	Kräfte im Magnetfeld . . . . .	20
1.5.2	Der Hall-Effekt . . . . .	22
1.5.3	Das Gesetz von Biot-Savart . . . . .	23
1.6	Elektromagnetische Induktion . . . . .	28
1.6.1	Das Induktionsgesetz und die Lenzsche Regel . . . . .	28
1.6.2	Ein- und Ausschaltvorgänge bei einer Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstands und einer Spule . . . . .	33
1.7	Übungsaufgaben . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Gleichstromkreise</b>	<b>42</b>
2.1	Grundbegriffe . . . . .	42
2.1.1	Die Kirchhoffschen Regeln . . . . .	42
2.1.2	Leistung elektrischer Ströme . . . . .	44
2.2	Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle . . . . .	45
2.3	Übungsaufgaben . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Elektromotoren und Grundbegriffe zu Wechselströmen</b>	<b>51</b>
3.1	Grundbegriffe . . . . .	51
3.1.1	Kinematik und Dynamik eines rotierenden starren Körpers . . . . .	51
3.1.2	Erzeugung von Wechselströmen . . . . .	53
3.2	Elektromotoren . . . . .	55
3.2.1	Grundbegriffe . . . . .	55
3.2.2	Gleichstrommotoren . . . . .	57
3.2.3	Elektrische Antriebe . . . . .	61
3.3	Übungsaufgaben . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Wechselströme</b>	<b>64</b>
4.1	Wechselstromwiderstände . . . . .	64
4.2	Anwendungen . . . . .	75
4.2.1	Elektrische Energieversorgung mit Dreiphasen-Wechselstrom . . . . .	75

4.2.2	Transformatoren . . . . .	78
4.2.3	Einfache passive Netzwerke . . . . .	79
4.2.4	Schwingkreise . . . . .	82
4.3	Übungsaufgaben . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Überblick</b>	<b>97</b>

# 1 Physikalische Grundbegriffe

## 1.1 Elektrische Ladungen und Felder

### 1.1.1 Elektrische Ladungen

- Es gibt zwei Arten der Ladung. Wir sprechen von positiven und negativen Ladungen. Die Gesamtladung ist der Unterschied der Beträge der positiven und negativen Ladungen. Ist die Gesamtladung eines Körpers gleich Null, so ist er insgesamt elektrisch neutral.
- In abgeschlossenen Systemen bleibt die Ladungsmenge erhalten.
- Ladung kommt nur als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} \text{ (Coulomb)}$$

vor, ist also gequantelt. Ein Elektron hat die Ladung  $-e$ , ein Proton hat die Ladung  $+e$ .

- Gleichnamige Ladungen stoßen einander ab, ungleichnamige Ladungen ziehen einander an.

#### *Historische Anmerkung*

Benjamin Franklin (\* 17.01.1706, † 17.04.1790)

- Lufterlektrizität
- Prinzip der Ladungserhaltung
- Erfindung des Blitzableiters

#### **Das Coulombsche Gesetz**

Zwischen zwei Punktladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  wirkt die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_r.$$

Dabei bezeichnet  $\epsilon_0$  die *Influenzkonstante*

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{J}^{-1} \text{m}^{-1}$$

und

$$\vec{e}_r := \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

*Anmerkung*

Das Coulombsche Gesetz in dieser Form lässt sich mit Hilfe des allgemeinen Coulombschen Gesetzes der Maxwell-Gleichungen,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho$$

und dem Integralsatz von Gauß,

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} d^3x$$

herleiten.

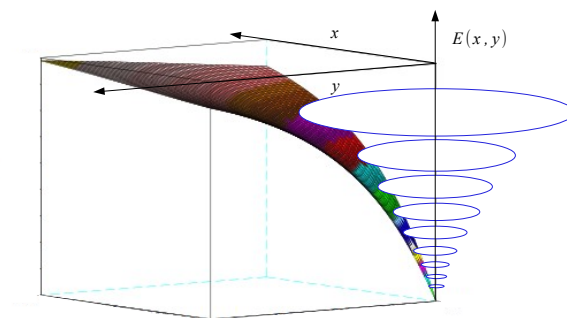
### 1.1.2 Das elektrische Feld

Elektrische Kräfte, die auch auftreten, wenn der Körper ruht, werden *Coulomb-Kräfte* genannt. Neben der Coulomb-Kräften werden wir die *Lorentz-Kraft* kennenlernen.

Diese Kräfte sind proportional zur Ladung  $q$  des Probekörpers. Daher ist die Definition

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

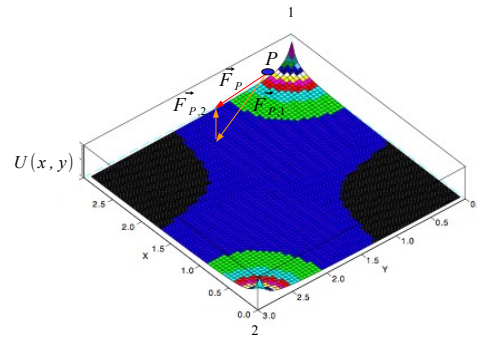
der *elektrischen Feldstärke* sinnvoll.



**Abbildung 1.1** Elektrisches Feld einer Punktladung

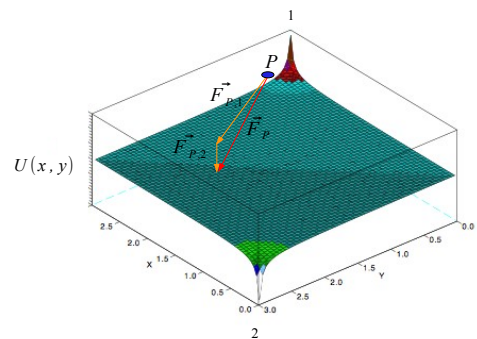
Die Felder zweier Punktladungen erzeugen Dipolfelder. Dabei lässt sich die Kraft auf eine Probeladung als Summe der vektoriellen Coulomb-Kräfte hervorgerufen durch die einzelnen Punktladungen berechnen.

Im Falle zweier gleichnamiger Punktladungen  $Q$  erhalten wir ein Potential  $U$  folgender Form:



**Abbildung 1.2** Potential zweier gleichnamiger Punktladungen

Sind die Punktladungen ungleichnamig und gleich  $\pm Q$ , so ergibt sich ein Potential  $U$  der Form:



**Abbildung 1.3** Potential zweier ungleichnamiger Punktladungen

Neben der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  tritt häufig die Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  auf. Im Vakuum gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

und in linearen, isotropen Medien

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$$

Dabei ist

- $\epsilon$ : Dielektrizitätskonstante
- $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante;  $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} CV^{-1}m^{-1}$

## 1.2 Spannung und Potential

Bewegt sich eine Ladung  $q$  zwischen zwei Punkten, zwischen denen die Spannung  $U$  herrscht, so wird dabei die Energie

$$W = q \cdot U$$

frei.

In einem elektrischen Feld wirkt auf eine Punktladung  $q$  eine Kraft  $F$ . Der Abstand zweier Punkte 1 und 2 betrage  $s$ . Ist  $F$  konstant, so bezeichnen wir die Größe

$$U = \frac{F}{q} \cdot s$$

als (Betrag der) Spannung zwischen den Punkten 1 und 2.

Die SI-Einheit von  $U$  ist  $1\text{ V}$  (Volt).

Ferner gilt:  $1\text{ J} = 1\text{ C} \cdot \text{V}$ .

Um die Arbeit, die gegen eine nicht notwendigerweise konstante oder in Bewegungsrichtung wirkende Kraft aufgebracht werden muss, zu berechnen, verwenden wir

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Als Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 bezeichnen wir

$$U_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Ist das Kraftfeld  $\vec{F}$  konservativ, so existiert ein Potential  $U = U(x, y, z)$ , so dass

$$U_{12} = U_2 - U_1, \text{ wobei } U_i = U(x_i, y_i, z_i).$$

Ein Kraftfeld  $\vec{F}$  heißt konservativ, wenn  $\vec{F}$  nur von den Ortskoordinaten abhängt und zu  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  eine Funktion  $V = V(x, y, z)$  existiert, so dass

$$\vec{F} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

gilt.



Berechnen wir beispielsweise die Arbeit  $W$ , die bei beliebigen Verschiebungen einer Ladung  $q$  im Coulomb-Feld  $F$  einer Ladung  $Q$  verrichtet wird, so erhalten wir

$$W_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

und

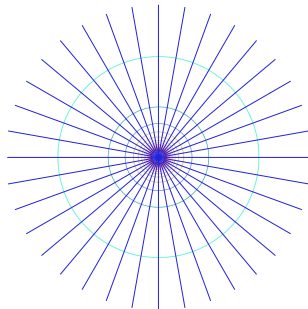
$$W_{1\infty} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left( - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \right) = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1}.$$

Setzen wir

$$U_{\infty} = 0,$$

so folgt daher

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$



**Abbildung 1.4** Kreisförmige Höhenlinien des Potentials  $U$  einer Punktladung

Die Innenwand eines metallischen Hohlkörpers ist eine Äquipotentialfläche. Gibt es im Inneren dieses Hohlkörpers keine Ladungen, so ist dort  $U = \text{const.}$  und daher  $E = 0$ . Dieser Abschirmeffekt wird bei dem sogenannten Faraday-Käfig eindrucksvoll deutlich.

## 1.3 Kapazität

### 1.3.1 Kondensatoren

Die Proportionalität zwischen Spannung  $U$  und Ladungsmenge  $Q$  gilt nicht nur für Punktladungen, sondern für beliebige Ladungsverteilungen. Wir schreiben daher

$$Q = CU$$

mit einer Konstante  $C$ . Diese wird *Kapazität* genannt.

Die SI-Einheit von  $C$  ist

$$1 \text{ F (Farad)} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}.$$

Eine gleichmäßig geladene und unendlich ausgedehnte ebene Platte mit der Flächenladungsdichte  $\sigma$  erzeugt ein homogenes elektrische Feld der Stärke

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

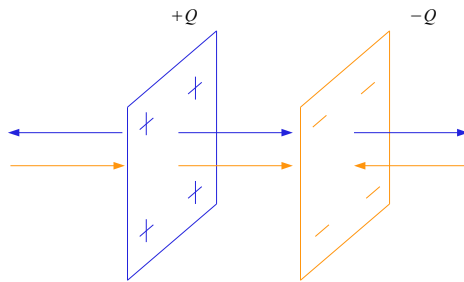
da der elektrische Fluss durch die geschlossene Fläche  $\partial\Omega$  um eine Platte

$$\phi := \iint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2AE$$

nach dem Coulombschen Gesetz mit  $\epsilon_0^{-1}A\sigma$  übereinstimmt, wobei  $A$  der Flächeninhalt einer (approximierenden endlich ausgedehnten) Kondensatorplatte ist.

Die elektrische Feldstärke zwischen den Platten eines Plattenkondensators beträgt demnach näherungsweise

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0}.$$



**Abbildung 1.5** Feldkomponenten eines Plattenkondensators

Mit

$$U = Ed$$

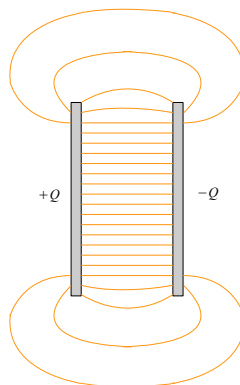
und

$$C = \frac{Q}{U}$$

erhalten wir für die Kapazität eines Plattenkondensators

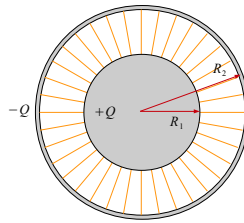
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Das elektrische Feld eines Plattenkondensators ist näherungsweise homogen. Insbesondere in den Randbereichen der Platten weicht es davon allerdings ab.



**Abbildung 1.6** Feld eines Plattenkondensators

Das Feld eines Kugelkondensators ist hingegen radialsymmetrisch.



**Abbildung 1.7** Feld eines Kugelkondensators

Es gilt

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

#### *Historische Anmerkung*

Allesandro Volta (\* 18.02.1745, † 05.03.1827)

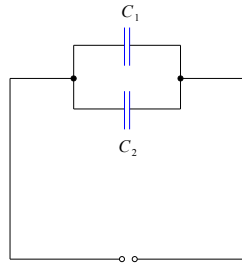
- Erfindung der Batterie
- $Q \sim U$  im Kondensator

### Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Die Kapazität parallel geschalter Kondensatoren addiert sich, so dass

$$C = C_1 + C_2,$$

da  $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = C U.$

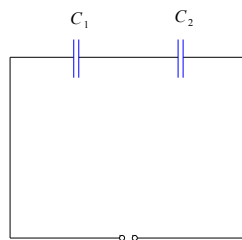


**Abbildung 1.8** Parallelschaltung von Kondensatoren

Für in Serie geschalteter Kondensatoren gilt

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1},$$

da  $U = U_1 + U_2 = Q(C_1^{-1} + C_2^{-1}).$



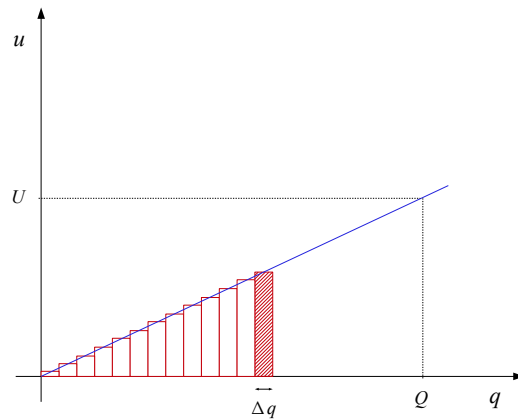
**Abbildung 1.9** Reihenschaltung von Kondensatoren

### 1.3.2 Energieinhalt eines homogenen elektrischen Feldes

Die *gesamte Arbeit* für den Transport der Ladung  $Q$  beträgt

$$W = \int_0^Q u \, dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \, dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU,$$

wobei  $u = C^{-1}q$  ist und  $dq$  als infinitesimal kleine Ladung vorausgesetzt wird.



**Abbildung 1.10** Spannung  $u = u(q)$

## 1.4 Der elektrische Strom und Ohmsche Widerstand

### 1.4.1 Stromstärke

Fließt während einer Zeit  $\Delta t$  eine Ladungsmenge  $\Delta Q$  durch den Querschnitt eines Leiters, so sprechen wir davon, dass ein elektrischer Strom  $I$  fließt. Ist dieser zeitlich konstant, so definieren wir

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Allgemein gilt

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Im SI-System ist die Einheit der Stromstärke:

$$1 \text{ A (Ampère)} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}.$$

### 1.4.2 Der Ohmsche Widerstand

Bei vielen Leitern, wie Metalldrähten oder Elektrolytlösungen, lässt sich eine Proportionalität zwischen dem Strom  $I$ , der durch den Leiter fließt, und der angelegten Spannung  $U$  feststellen. Der entsprechende Proportionalitätsfaktor heißt *Leitwert*. Dessen Kehrwert heißt *Widerstand*  $R$ . Das *Ohmsche Gesetz* lautet:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Die SI-Einheit von  $R$  ist

$$1\Omega (\text{Ohm}) = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}.$$

Ist der Ohmsche Widerstand homogen mit konstantem Querschnitt  $A$  und Länge  $l$ , so gilt

$$R = \frac{\rho l}{A}.$$

Die Größe  $\rho$  heißt *spezifischer Widerstand* des Materials. Dessen Kehrwert

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

heißt *elektrische Leitfähigkeit*.

Jedoch gilt das Ohmsche Gesetz nicht für alle Leiter. Das zeigt sich bei Gasentladungsstrecken, wie Bogenlampen, Leuchtstoff- und Vakuumröhren, und bei vielen Halbleiterbauteilen.

---

Spezifischer Widerstand  $\rho$  in  $10^{-6}\Omega m$   
bei  $18^\circ C$

---

Silber	0,016
Kupfer	0,017
Aluminium	0,028
Eisen	0,098
Quecksilber	0,958
Konstantan	0,50
Quarzglas	$5 \cdot 10^{22}$
Porzellan	$\approx 10^{18}$
Bernstein	$> 10^{22}$

---



Die Stromdichte  $\vec{j}$  ist mittels

$$I = \iint \vec{j} d\vec{A}$$

definiert. Dabei ist  $d\vec{A} = \vec{n} dA$  und  $\vec{n}$  die äußere Einheitsnormale der Fläche  $A$ .

### *Historische Anmerkung*

André-Marie Ampère (\* 20.01.1775, † 10.06.1836)

- Begriff der elektrischen Spannung und des elektrischen Stromes
- elektrische Ströme erzeugen Magnetfelder

Georg Simon Ohm (\* 16.03.1789, † 06.07.1854)

## Serien- und Parallelschaltung

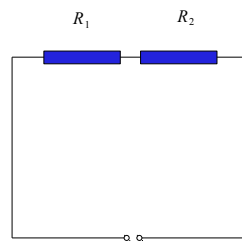
### *Serien- oder Reihenschaltung*

- Durch in Reihe geschaltete Ohmsche Widerstände fließt der gleiche Strom  $I$ .
- Die Spannungen  $U_i$  an den Einzelwiderständen addieren sich zu der Gesamtspannung

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n .$$

- Daher beträgt der Gesamtwiderstand

$$R = \frac{U}{I} = \sum_{i=1}^n R_i .$$



**Abbildung 1.11** Reihenschaltung Ohmscher Widerstände

### Parallelschaltung

- An parallelgeschalteten Widerständen liegt die gleiche Spannung  $U$ .
- Der Strom durch den Widerstand  $i$  beträgt

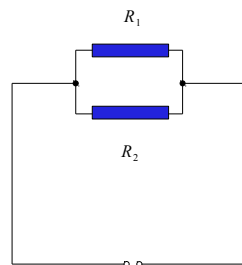
$$I_i = \frac{U}{R_i}.$$

- Daher fließt insgesamt der Strom

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}$$

- und der Gesamtwiderstand der Schaltung beträgt

$$R = \frac{U}{I} = \left( \sum_i^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1}.$$



**Abbildung 1.12** Parallelschaltung Ohmscher Widerstände

## 1.5 Das magnetische Feld

### 1.5.1 Kräfte im Magnetfeld

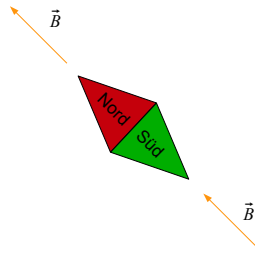
Während im elektrischen Feld auf eine Ladung  $q$  immer eine Kraft wirkt, wirkt im Magnetfeld auf die Ladung nur dann eine Kraft, wenn sich die Ladung bewegt. Diese Kraft wird als *Lorentz-Kraft* bezeichnet. Sie beträgt

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Dabei bezeichnet  $\vec{B}$  die *magnetische Flussdichte*. Ihre SI-Einheit lautet:

$$1 \frac{N}{Cms^{-1}} = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 T \text{ (Tesla)}$$

Die Feldlinien des  $B$ -Feldes sind geschlossen.



**Abbildung 1.13** Einstellung einer Magnetnadel

Ein Draht der Länge  $l$  mit dem Querschnitt  $A$  enthält  $n l A$  Elektronen. Dabei bezeichnet  $n$  die Teilchenzahldichte. Daher wirkt auf den Draht im Magnetfeld die Kraft

$$\vec{F} = -enlA\vec{v} \times \vec{B}.$$

Da für die Stromdichte

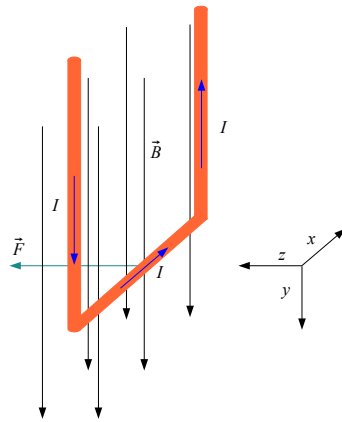
$$\vec{j} = -en\vec{v}$$

gilt, lässt sich die Kraft auch folgendermaßen schreiben:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}.$$

Dabei kennzeichnet  $\vec{l}$  neben der Länge des Drahtes auch die technische Stromrichtung.

Die Kraftwirkung auf eine stromdurchflossene Leiterschleife lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:



**Abbildung 1.14** Stromdurchflossene Leiterschleife im Magnetfeld

### 1.5.2 Der Hall-Effekt

Unter der Wirkung der Lorentz-Kraft werden die Ladungsträger senkrecht zur Bewegungsrichtung und dem Magnetfeld abgelenkt. An den Seitenflächen lagern sich entgegengesetzte Ladungen an, deren Feld nach kurzer Zeit die Wirkung der Lorentzkraft aufhebt.

Für die Feldstärke dieses Querfeldes gilt

$$e\vec{E}_H = -e\vec{v} \times \vec{B}.$$

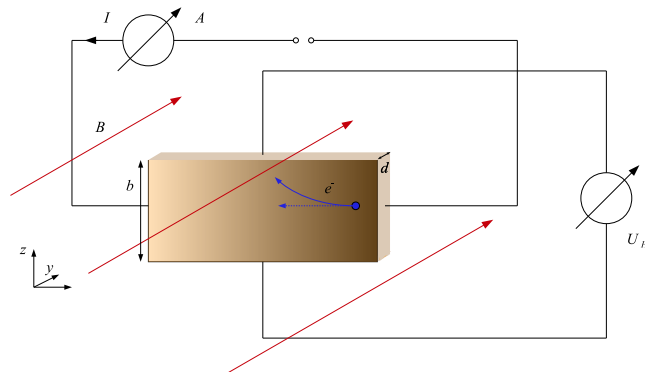


Abbildung 1.15 Die Lorentz-Kraft und der Hall-Effekt

Weiterhin gilt

$$E_H \cdot b = U_H$$

und

$$I = j \cdot A = j \cdot bd = envbd,$$

wobei

$$n = \frac{N}{V}$$

die Ladungsträgerdichte bezeichnet. Demnach erhalten wir

$$U_H = -bvB = -\frac{1}{en} \frac{IB}{d} = -R_H \frac{IB}{d},$$

wobei

$$R_H := \frac{1}{en}.$$

### 1.5.3 Das Gesetz von Biot-Savart

Nach dem Gesetz von Biot-Savart

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

ist das Magnetfeld orthogonal zur Ebene, die von den Vektoren  $d\vec{l}$  und  $\vec{r}$  aufgespannt wird.

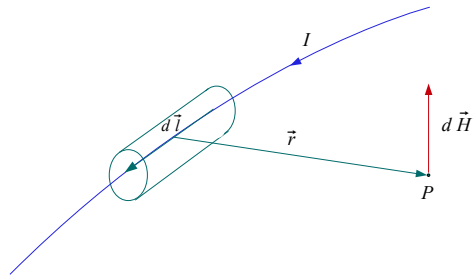


Abbildung 1.16 Magnetfeld im Punkt  $P$

#### Beispiele

##### a) Magnetfeld eines geraden Leiters

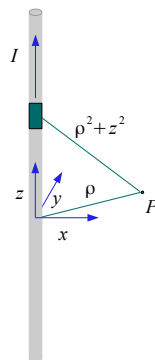


Abbildung 1.17 Magnetfeld im Punkt  $P$

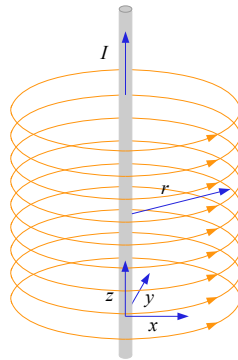
Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  erhalten wir

$$\vec{H} = H_\varphi \vec{e}_\varphi$$

und

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{I}{4\pi} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{4\pi} \rho \lim_{L \rightarrow \infty} (\rho + z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{z}{\rho^2} \Big|_{-L}^L \\ &= \rho \frac{I}{4\pi} \frac{2}{a^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{\rho}{L})^2 + 1}} = \frac{I}{4\pi} \rho \frac{2}{\rho^2} = \frac{I}{2\pi \rho} . \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $r := \rho$ .

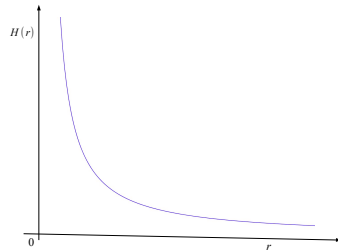


**Abbildung 1.18** Magnetfeldlinien um einen geraden stromdurchflossenen Leiter



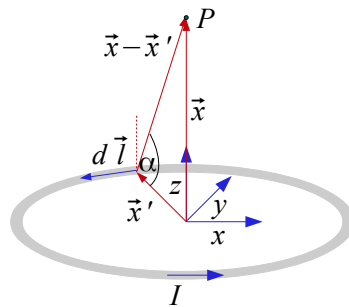
Die Feldstärke eines geraden Leiters beträgt

$$H(r) = \frac{I}{2r\pi}.$$



**Abbildung 1.19** Die radiale Abhängigkeit des  $H$ -Feldes

*b) Magnetfeld eines Kreisstroms*



**Abbildung 1.20** Magnetfeld im Punkt  $P = (0, 0, z)$

Mit

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}', \quad d\vec{l} = d\vec{x}', \quad \rho := |\vec{x}'|$$

erhalten wir für einen beliebigen Punkt auf der  $z$ -Achse

$$H_z(z) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{\rho^2 + z^2} dl$$

und mit

$$\cos \alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

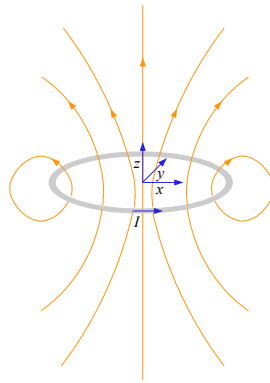
für diese Feldkomponente

$$H_z(z) = \frac{I}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi\rho = \frac{I}{2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir nun wieder  $r$  statt  $\rho$ , so können wir für diese Feldkomponente im Ursprung

$$H_z(0) = \frac{I}{2} \frac{1}{r}$$

schreiben.

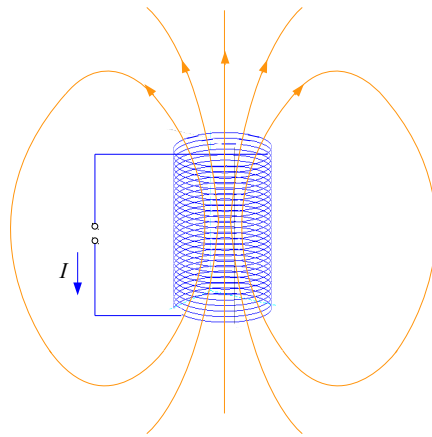


**Abbildung 1.21** Magnetfeldlinien um einen Kreisstrom

Die Feldstärke einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius  $r$  beträgt im Ursprung

$$H(r) = \frac{I}{2r}.$$

c) Feldstärke im Inneren einer langen Zylinderspule



**Abbildung 1.22** Magnetfeldlinien um eine Spule

Die Feldstärke im Inneren einer langen Zylinderspule beträgt

$$H = In, \text{ wobei } n : \text{Anzahl der Drahtwindungen/Meter}$$

wobei

$$n = \frac{N}{l}$$

die Windungsdichte,  $N$  die Windungszahl und  $l$  die Länge der Spule bezeichnet.

Im Vakuum gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

und in linearen, isotropen Medien

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Dabei ist

- $\mu = \mu_r \mu_0$ : Permeabilität
- $\mu_r$ : Permeabilitätszahl
- $\mu_0$ : magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante;  $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$

## 1.6 Elektromagnetische Induktion

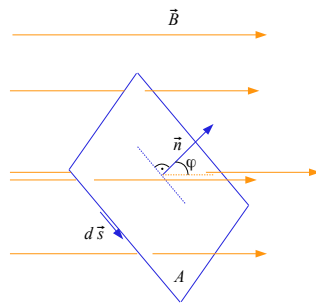
### 1.6.1 Das Induktionsgesetz und die Lenzsche Regel

Mit dem magnetischen Fluss

$$\phi := \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA,$$

wobei  $\vec{n}$  die äußere Einheitsnormale der Fläche  $A$  ist, lässt sich das Induktionsgesetz folgendermaßen schreiben:

$$U = \oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$



**Abbildung 1.23** Magnetischer Fluss durch eine Fläche

Die Induktivität  $L$  eines Leiters ist definiert durch

$$\phi = LI.$$

Bei einer langen, leeren Spule tritt durch jede Windung der Fluss  $\mu_0 H A$  und durch die  $N$  Windungen der Fluss

$$\phi = \mu_0 N H A = \mu_0 \frac{N^2}{l} A I.$$

Daher hat die Spule die Induktivität

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A.$$

Die SI-Einheit der Induktivität lautet:

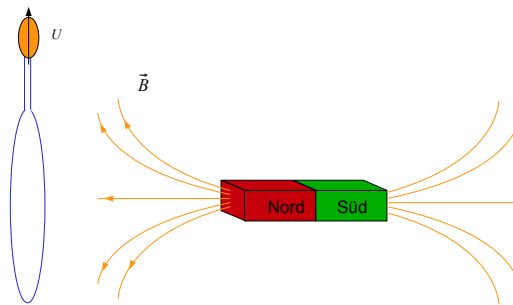
$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}.$$

Variiert der magnetische Fluss  $\phi$  zeitlich, so wird eine Spannung induziert. Das kann beispielsweise

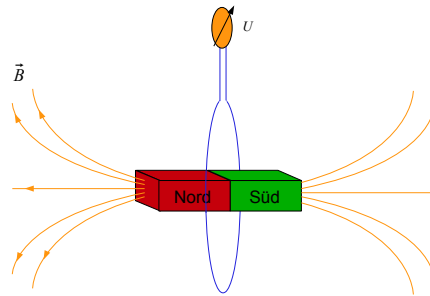
- durch Änderung des Magnetfeldes
- oder durch eine Drehung der Fläche

geschehen.

*Induktion durch Änderung des Magnetfeldes*

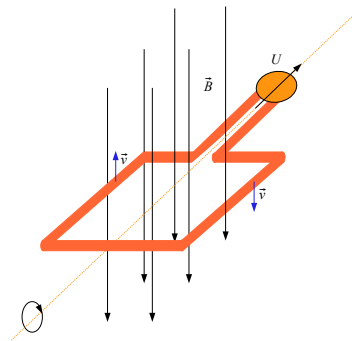


**Abbildung 1.24** Verschiebung eines Stabmagneten, Teil 1

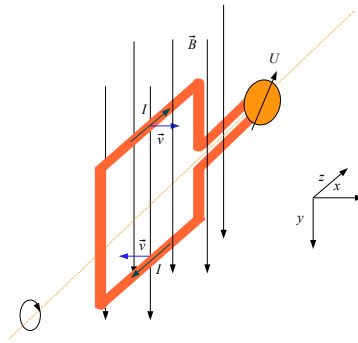


**Abbildung 1.25** Verschiebung eines Stabmagneten, Teil 2

### *Induktion durch Drehung einer Leiterschleife*



**Abbildung 1.26** Drehung einer Leiterschleife im Magnetfeld, Teil 1

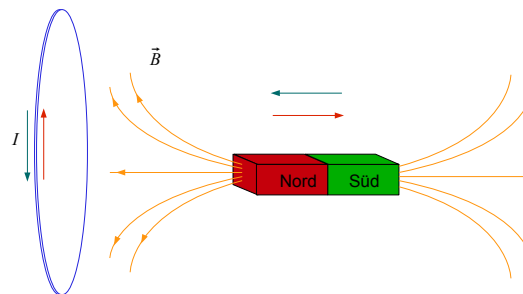


**Abbildung 1.27** Drehung einer Leiterschleife im Magnetfeld, Teil 2

*Lenzsche Regel*, (H. F. E. Lenz, 1855)

Der induzierte Strom ist immer so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt.

So verursacht die Bewegung eines Stabmagneten in einer Leiterschleife einen induzierten Strom, dessen Magnetfeld der Bewegung des Stabmagneten entgegenwirkt.



**Abbildung 1.28** Verschiebung eines Stabmagneten

Auch die Veränderung der Fläche  $A$  eines Leiters in einem Magnetfeld kann zu einer induzierten Spannung führen.

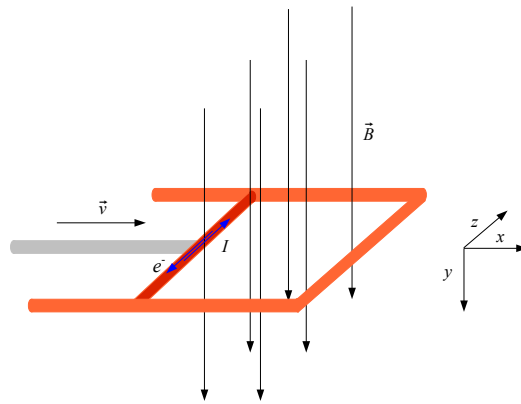


Abbildung 1.29 Induzierte Spannung in einem Draht

Wird, durch die zeitlich veränderliche Stromstärke  $I_1$  einer Feldspule 1, eine Spannung  $U$  in einer Induktionsspule 2 induziert und sind die Symmetrieachsen beider Spulen gleich, so gilt

$$U = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

mit der Gegeninduktivität

$$L_{21} = \mu \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2 .$$

### Historische Anmerkung

Hans Christian Ørsted (\* 14.08.1777, † 09.03.1851)

- magnetische Wirkung des elektrischen Stroms

Michael Faraday (\* 22.09.1791, † 25.08.1867)

- Drehung eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld
- Elektromagnetische Induktion

Joseph Henry (\* 17.12.1797, † 13.05.1878)

Nikola Tesla (\* 10.07.1856, † 07.01.1943)

- Mehrphasenwechselstrom
- Funktechnik
- Energieübertragung



### 1.6.2 Ein- und Ausschaltvorgänge bei einer Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstands und einer Spule

#### Einschaltvorgang

Wird der Schalter geschlossen, so genügt die Stromstärke  $I$  in dem abgebildeten Schaltkreis der Differentialgleichung

$$U_0 - LI'(t) = RI.$$

Die Anfangsbedingung lautet  $I(t = 0) = 0$ .

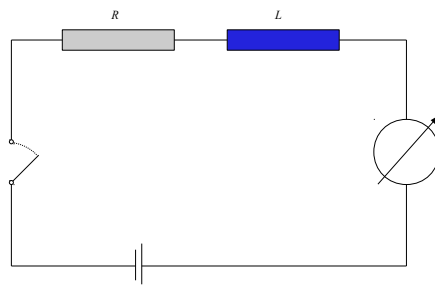
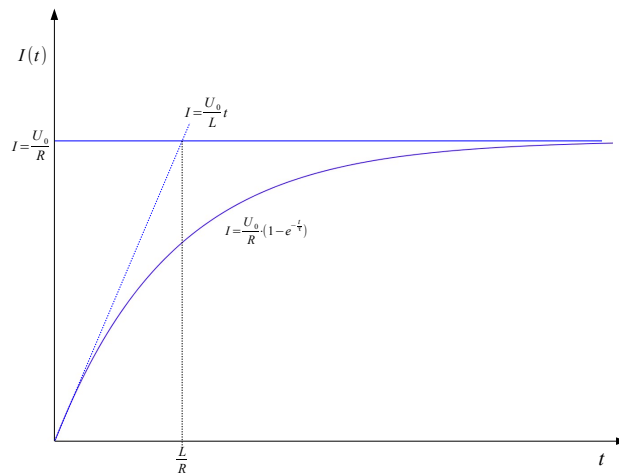


Abbildung 1.30 Einschaltvorgang

Als Lösung unseres Anfangswertproblems erhalten wir

$$I = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad \text{wobei } \tau := \frac{L}{R}.$$



**Abbildung 1.31** Die Stromstärke  $I(t)$  nach dem Einschalten

### Ausschaltvorgang

Wird der Schalter geöffnet, so gilt

$$RI + LI'(t) = 0.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{wobei } \tau := \frac{L}{R}$$

und  $I_0$  die Stromstärke vor dem Ausschalten bezeichnet.

## 1.7 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Zwei Elektronen befinden sich im festen Abstand  $r = 1 \text{ nm}$ . Berechnen Sie die Beträge der elektrischen Abstoßungskraft und der Massenanziehungskraft auf ein Elektron.

Anmerkung

Masse eines Elektrons  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,

Gravitationskonstante  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

### Aufgabe 2

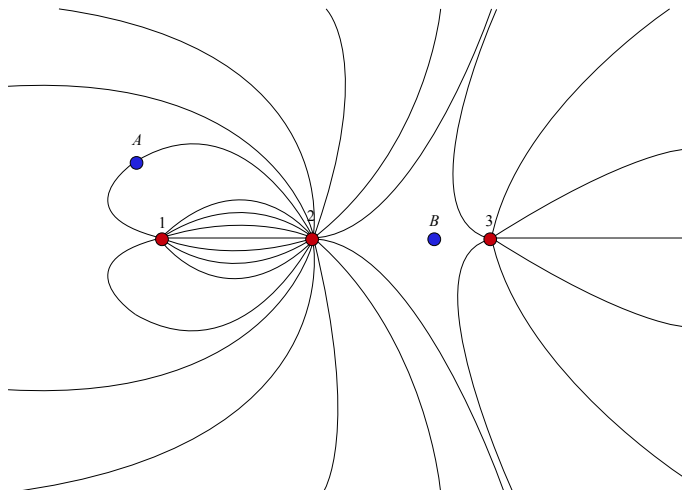
Zwei Punktladungen  $Q_1 = 60 \text{ nC}$  und  $Q_2$  befinden sich auf der  $x$ -Achse bei  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 3,0 \text{ cm}$ . Eine dritte Ladung  $Q_3 = 50 \text{ nC}$  hat von den beiden Ladungen jeweils den gleichen Abstand  $r = 2,5 \text{ cm}$ , wobei  $y_3 > 0$  ist.

Fertigen Sie eine Skizze an.

- Wie groß ist die auf  $Q_3$  wirkende Kraft, wenn  $Q_2 = -Q_1$  ist?
- Wie groß ist die auf  $Q_3$  wirkende Kraft, wenn  $Q_2 = Q_1$  ist?

### Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt die Feldlinien des elektrischen Feldes dreier Punktladungen. Die Ladung 1 habe positives Vorzeichen.



- Zeichnen Sie die Richtung der elektrischen Feldstärke am Ort  $A$  ein.
- Geben Sie die Vorzeichen der Ladungen 2 und 3 an.
- In welchem Bereich ist die elektrische Feldstärke groß/gering?

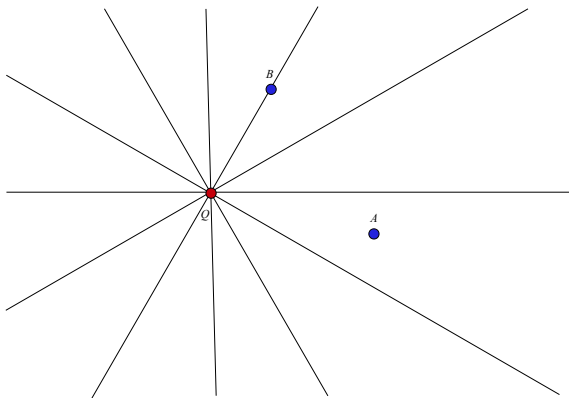
#### Aufgabe 4

In einem homogenen elektrischen Feld hat die Feldstärke den Wert  $E = 1 \text{ kV/m}$ . Berechnen Sie die Spannung zwischen zwei Punkten, die einen Abstand von  $1 \text{ cm}$  haben

- in Feldrichtung,
- senkrecht zur Feldrichtung.

#### Aufgabe 5

Berechnen Sie die Spannung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  im Feld einer positiven Punktladung  $Q = 10 \text{ nC}$  (siehe Abbildung), wobei für die Abstände  $r(Q, A) = 5 \text{ cm}$  und  $r(Q, B) = 3 \text{ cm}$  gelte.



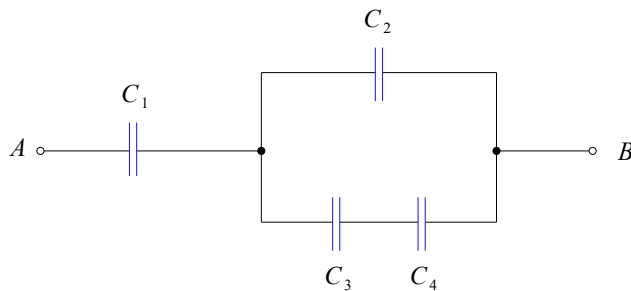
#### Aufgabe 6

Ein Experimentier-Plattenkondensator hat kreisförmige Platten von je  $25 \text{ cm}$  Durchmesser. Er wird bei einem Plattenabstand von  $d = 2 \text{ mm}$  auf eine Spannung  $U = 3 \text{ kV}$  aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt.

- Welche Ladungsmenge befindet sich auf den Platten?
- Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Inneren des Kondensators?
- Wie ändern sich die Ladung, Spannung und elektrische Feldstärke, wenn der Plattenabstand auf  $1 \text{ cm}$  vergrößert wird?

**Aufgabe 7**

Gegeben ist die folgende Kondensatorschaltung



mit

$$C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 8 \text{ nF}, C_3 = 6 \text{ nF}, C_4 = 3 \text{ nF}.$$

- Berechnen Sie die Gesamtkapazität  $C$  zwischen den Anschlüssen  $A$  und  $B$ .
- Es werden zunächst alle Kondensatoren entladen. Dann wird die Spannung  $U_{AB} = 100 \text{ V}$  angelegt. Welche Spannungen liegen nun an den Kondensatorplatten, und welche Ladungen  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  tragen nun die positiv geladenen Platten der einzelnen Kondensatoren?

**Aufgabe 8**

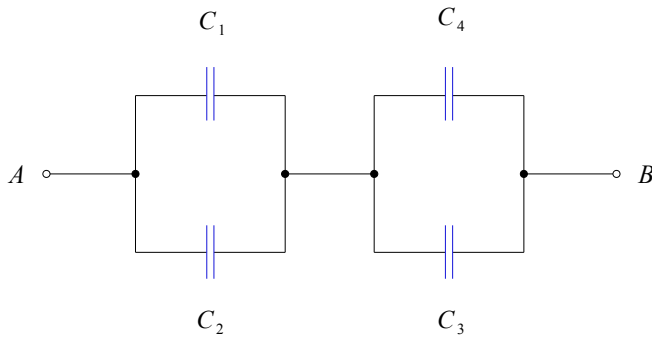
Vier freie, gleich große, positive Punktladungen  $Q$  befinden sich an den Eckpunkten eines Quadrats mit der Seitenlänge  $a$ . Welche Ladung müsste im Mittelpunkt des Quadrats angeordnet werden, damit das System aller Ladungen im Gleichgewicht ist?

**Aufgabe 9**

Gegeben ist ein Plattenkondensator mit den Abmessungen  $A = 2 \cdot 2 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ . Bestimmen Sie die Anzahl der Ladungsträger auf einer Platte, wenn eine Spannung von  $1000 \text{ V}$  anliegt.

**Aufgabe 10**

Gegeben ist folgende Schaltung



mit

$$C_1 = C_2 = 100 \text{ nF}, \quad C_3 = C_4 = 50 \text{ nF}.$$

- Berechnen Sie die Gesamtkapazität der Schaltung.
- Berechnen Sie die Spannung an  $C_1$ , wenn an den Anschluss  $B$  eine Spannung von  $160 \text{ V}$  gegenüber  $A$  angelegt wird.

**Aufgabe 11**

Drei Punktladungen  $Q_A = -Q_B = Q_C = 100 \text{ nC}$  befinden sich an den Punkten  $A(4 \text{ cm}|3 \text{ cm})$ ,  $B(0 \text{ cm}|3 \text{ cm})$  und  $C(4 \text{ cm}|0 \text{ cm})$ .

- Fertigen Sie eine maßstäbliche Skizze an, und zeichnen Sie die Ladungen und die auf Ladung  $Q_A$  wirkenden Kräfte und die Gesamtkraft maßstäblich ein.
- Die Ladungen bei  $A$  und  $C$  werden entfernt. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke am Ort  $(0|0)$ .

**Aufgabe 12**

An einem Leiter liegt eine Spannung von  $11 \text{ V}$  an, und es fließt ein Strom von  $70 \text{ mA}$ . Berechnen Sie den Widerstand und den Leitwert des Leiters. Wie viele Elektronen treten pro Sekunde durch eine Querschnittsfläche des Leiters?

**Aufgabe 13**

Zur Herstellung eines temperaturunabhängigen Widerstands mit dem Wert  $R = 2\,\Omega$  werden ein Konstantan-Widerstandsdraht und ein Neusilber-Widerstandsdraht in Reihe geschaltet. Die spezifischen Widerstände bei  $20^\circ\text{C}$  betragen:

$$\rho_{\text{Konst.}} = 0,5\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}$$

und

$$\rho_{\text{Neus.}} = 0,3\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}.$$

Welche Drahtlängen sind erforderlich, wenn die Widerstandsdrähte einen Querschnitt von  $0,5\,\text{mm}^2$  besitzen und der Widerstand des Konstantandrahts  $0,2\,\Omega$  betragen soll?

**Aufgabe 14**

Beim Fremdstart eines Automotors fließt durch ein  $2\,\text{m}$  langes Starthilfekabel ein Strom von  $100\,\text{A}$ .

Berechnen Sie die maximale hier auftretende elektrodynamische Kraft auf das Kabel im Erdmagnetfeld ( $B = 10^{-4}\,\text{T}$ ).

**Aufgabe 15**

Der Abstand zweier paralleler Leiter ist  $d = 10\,\text{cm}$ . Sie werden vom gleichen Strom  $I = 10\,\text{A}$  in entgegengesetzter Richtung durchflossen.

Wie groß ist die magnetische Flussdichte zwischen den Leitern im Abstand von  $2,5\,\text{cm}$  von einem der Leiter?

**Aufgabe 16**

Wie groß ist die Stromstärke in einer Magnetspule ( $\frac{N}{l} = 100\,\text{m}^{-1}$ ), wenn im Inneren eine magnetische Flussdichte von  $10\,\text{T}$  herrscht?

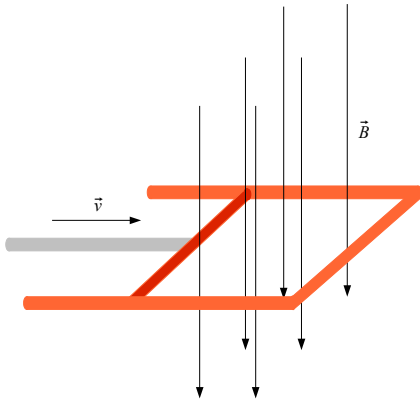
Wie groß ist der magnetische Fluss durch eine Fläche von  $1\,\text{cm}^2$  im Inneren dieser Spule, wenn die Fläche in einem Winkel von  $45^\circ$  zur Spulenachse steht?

**Aufgabe 17**

Im Inneren einer langen Zylinderspule (Feldspule) ( $N = 10\,000$ ,  $l = 50\,\text{cm}$ ,  $D = 10\,\text{cm}$ ) ist eine kleine Induktionsspule ( $N' = 1\,000$ ,  $D' = l' = 5\,\text{cm}$ ) so angebracht, dass ihre Achse parallel zur Achse der Feldspule ist. Berechnen Sie die in der Induktionsspule induzierte Spannung, wenn der Strom in der Feldspule innerhalb von  $0,1\,\text{s}$  linear um  $0,2\,\text{A}$  ansteigt.

**Aufgabe 18**

Ein waagrechter Kupferstab ( $l = 10 \text{ cm}$ ) wird beidseitig durch Kupferschienen geführt. Senkrecht zur Anordnung wirkt, wie abgebildet, ein homogenes magnetisches Feld mit  $B = 0,01 \text{ T}$ . Der Leiter wird durch einen Antrieb mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  nach rechts bewegt.



- In welcher Weise wirkt die Lorentzkraft auf den Induktionsstrom?
- Ermitteln Sie die Richtung des Induktionsstroms.
- Berechnen Sie die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses.
- Wie groß ist der Induktionsstrom, wenn die aus dem Stab und den Schienen bestehende Anordnung einen Ohmschen Widerstand von  $4 \cdot 10^{-4} \Omega$  hat?
- Welche Leistung muss der Antriebsmotor mindestens aufbringen (Reibung vernachlässigt)?

**Aufgabe 19**

- Berechnen Sie die induzierte Spannung in der Feldspule der Aufgabe 17 zunächst mit Hilfe des Induktionsgesetzes.
- Berechnen Sie die Induktivität der Feldspule und die in der Feldspule induzierte Spannung mit Hilfe der Formel für die Selbstinduktion.

**Aufgabe 20**

Erläutern Sie folgende Beobachtung mit Hilfe der Lenzschen Regel:

In Verlängerung der Achse einer Spule hängt frei beweglich ein kreisförmiger Kupferring. Wenn der Strom in der Spule eingeschaltet wird, bewegt sich der Kupferring von der Spule weg. Was passiert, wenn der Strom in der Spule ausgeschaltet wird?



**Aufgabe 21**

Im Inneren einer 25 *cm* langen Spule mit 1000 Windungen und einem Durchmesser von 10 *cm* beträgt die magnetische Flussdichte 36  $\mu T$ . Berechnen Sie die Stromstärke in der Spule und den magnetischen Fluss durch die Querschnittsfläche der Spule.

## 2 Gleichstromkreise

### 2.1 Grundbegriffe

#### 2.1.1 Die Kirchhoffschen Regeln

*Kirchhoffs Knotenregel:* Pro Zeiteinheit muss an jedem Knoten die Summe der zugeflossenen Ladung gleich der Summe der abgeflossenen Ladung sein, d.h.

$$\sum_i I_i = 0.$$

*Kirchhoffs Maschenregel:* Bei fester Umlaufrichtung ist die Summe aller Spannungsabfälle einer Masche gleich Null, d.h.

$$\sum_i U_i = 0.$$

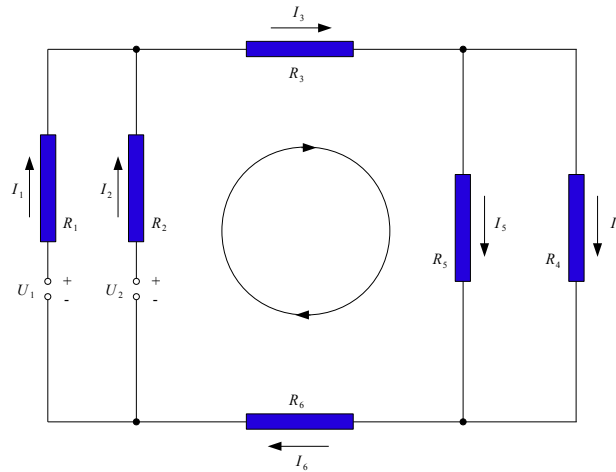
*Begründung:* Wegunabhängigkeit der Potentialdifferenz

*Historische Anmerkung*

Gustav Robert Kirchhoff (\* 12.03.1824, † 17.10.1887)

*Beispiel*

Um die Stromstärke in den Verzweigungspunkten eines Netzwerks zu bestimmen, betrachten wir Kirchhoffs Knoten- und Maschenregel.



**Abbildung 2.1** Die Kirchhoffschen Regeln

Mit Hilfe des Maschenregel erhalten wir

$$U_1 - U_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 ,$$

$$U_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_5 R_5 + I_6 R_6 ,$$

$$0 = -I_5 R_5 + I_4 R_4$$

und mittels der Knotenregel

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 ,$$

$$I_4 + I_5 - I_3 = 0 ,$$

$$-I_5 - I_4 + I_6 = 0 .$$

Nehmen wir an, dass  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ , und  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , gegeben sind, so bilden diese Gleichungen insgesamt ein lineares Gleichungssystem für die Variablen  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

### 2.1.2 Leistung elektrischer Ströme

Verschiebt sich eine Ladung  $Q$  zwischen zwei Orten mit Potentialdifferenz  $U$ , so wird dabei die Energie

$$W = QU$$

frei.

Wird elektrische Energie, bei konstanter Spannung, in Wärmeenergie umgewandelt, so beträgt die Wärmeleistung

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot \frac{dQ}{dt} = UI.$$

Die SI-Einheit von  $P$  ist

$$1 \text{ W (Watt)} = 1 \text{ V} \cdot \text{A}.$$

Tritt der Ladungstransport zudem in einem Ohmschen Leiter auf, so gilt

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

## 2.2 Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle

Wird der Strom  $I$  entnommen, so wird die Klemmenspannung  $U$  gegenüber der Leerlaufspannung  $U_0$  verringert. Dabei gilt

$$U = U_0 - I R_i,$$

wobei  $R_i$  der Innenwiderstand ist.

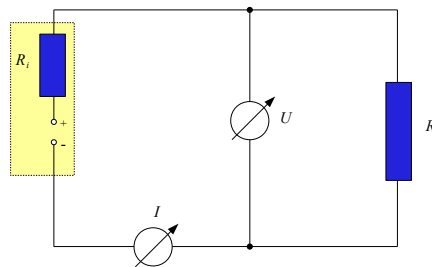


Abbildung 2.2 Spannungsquelle und Innenwiderstand

Die Leerlaufspannung  $U = U_0$  tritt als Grenzfall für  $R \rightarrow \infty$  auf, der Kurzschluss für  $R = 0$  und damit für  $U = 0$ .

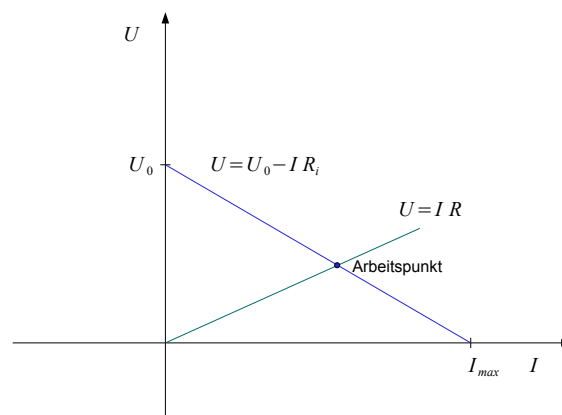


Abbildung 2.3 Klemmenspannung  $U$  der Spannungsquelle

Es gilt

$$I_{max} = \frac{U_0}{R_i}$$

und

$$\frac{dU}{dI} = -R_i.$$

Im Verbraucherwiderstand beträgt der Strom

$$I = \frac{U_0}{R_i + R}$$

und wird daher die Leistung

$$P = UI = (U_0 - R_i I) \cdot \frac{U_0}{R_i + R}$$

verbraucht. Folglich gilt

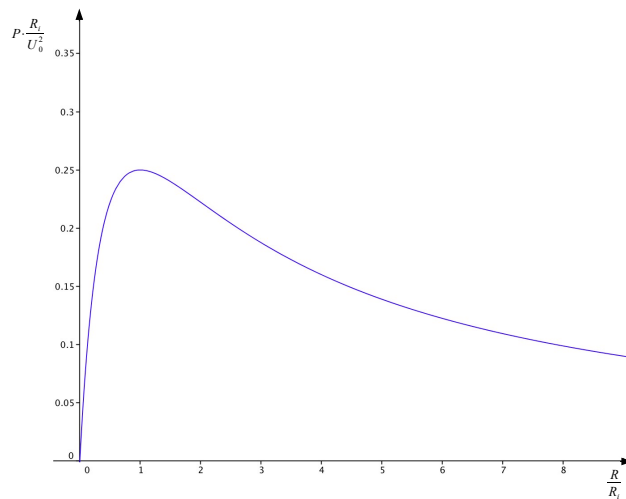
$$P = (U_0 - R_i \frac{U_0}{R_i + R}) \cdot \frac{U_0}{R_i + R} = \frac{U_0^2 R}{(R_i + R)^2}.$$

Um das Maximum  $P_{max}$  zu finden, berechnen wir

$$\frac{dP}{dR} = U_0^2 \frac{(R_i + R)^2 - 2R(R_i + R)}{(R_i + R)^4} = \frac{U_0^2}{(R_i + R)^4} (R_i + R)(R_i + R - 2R)$$

und erhalten

$$P_{max} = P(R_i) = \frac{U_0^2}{4R_i}.$$

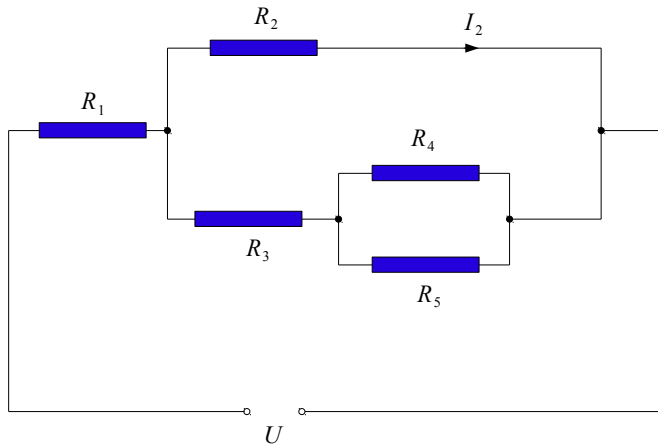


**Abbildung 2.4** Leistungsanpassung

## 2.3 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Gegeben ist ein Stromkreis



mit  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_2 = 500 \, \Omega$ ,  $R_3 = 200 \, \Omega$ ,  $R_4 = 600 \, \Omega$ ,  $R_5 = 600 \, \Omega$  und  $I_2 = 0,5 \, \text{A}$ .  
Berechnen Sie

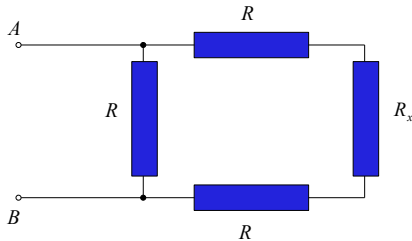
- die Ströme durch  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,
- die anliegende Spannung  $U$ ,
- die Spannungen an  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_5$ ,
- die Leistungen, die an den Widerständen in Wärme umgesetzt werden.

### Aufgabe 2

Wie können 60 Niederspannungsglühlampen ( $11 \, \text{W}$  bei  $0,6 \, \text{A}$ ) zusammengeschaltet werden, damit sie direkt an  $230 \, \text{V}$  betrieben werden können?

**Aufgabe 3**

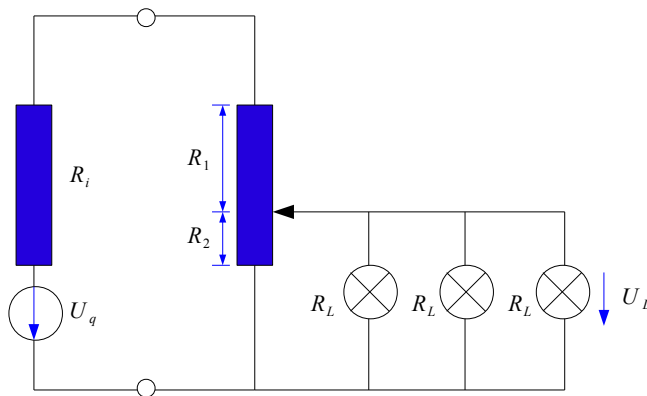
Die drei gleichen Widerstände  $R$  in der abgebildeten Schaltung betragen jeweils  $10\ \Omega$ .



Welchen Wert muss  $R_x$  haben, damit der Gesamtwiderstand  $R_{AB}$  der Schaltung  $9\ \Omega$  beträgt?

**Aufgabe 4**

Eine Spannungsquelle ( $U_q = 24\text{ V}$ , Innenwiderstand  $R_i = 0,5\ \Omega$ ) ist an eine Potentiometer-Schaltung angeschlossen.



Der Gesamtwiderstand des Potentiometers beträgt  $R_1 + R_2 = 2\ \Omega$ . Zur Versorgung von 3 Lampen mit einem Widerstand von jeweils  $R_L = 3\ \Omega$  wird am Potentiometer das Widerstandsverhältnis  $R_1 : R_2 = 5 : 11$  eingestellt.

- Berechnen Sie die an einer Lampe anliegende Spannung  $U_L$ .
- Berechnen Sie die von den Lampen aufgenommene Leistung und die im Potentiometer

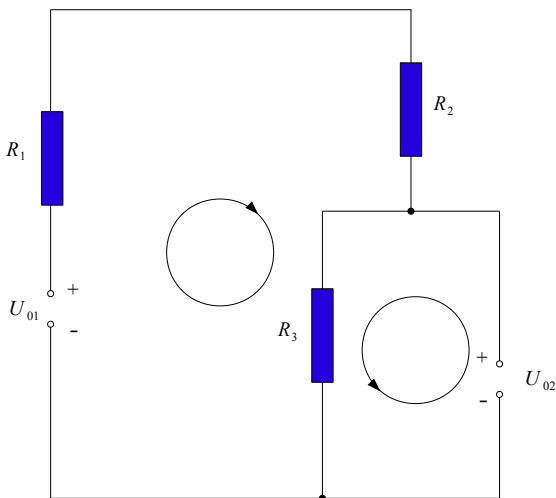


und in der Spannungsquelle umgesetzten Leistungen. Kommentieren Sie das Ergebnis.

- c) Berechnen Sie die Spannung, die an  $R_2$  anliegt, wenn bei gleicher Einstellung wie bei a) die Lampen nicht angeschlossen sind.

### Aufgabe 5

Gegeben ist die Schaltung



mit  $U_{01} = 10 \text{ V}$ ,  $U_{02} = 5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ .

Berechnen Sie die Spannung an  $R_2$  und den Strom, der durch die rechte Spannungsquelle,  $U_{02}$ , fließt. Verwenden Sie die eingetragenen Stromrichtungen.

### Aufgabe 6

Zwei gleiche Batterien haben jeweils eine Leerlaufspannung von  $4,8 \text{ V}$  und einen Kurzschlussstrom von  $16 \text{ A}$ . Mit ihnen soll eine Glühlampe (Widerstand  $4 \Omega$ ) betrieben werden. Ermitteln Sie durch Berechnung der Leistung der Glühlampe, ob diese bei Reihen- oder Parallelschaltung der Spannungsquellen heller leuchtet.

### Aufgabe 7

Eine Batterie hat eine Leerlaufspannung von  $12 \text{ V}$  und einen zunächst unbekannten Widerstand.

- Wenn ein Verbraucher mit Widerstand  $R_V = 3,2 \Omega$  angeschlossen ist, fließt ein Strom von  $3,7 \text{ A}$  durch die Batterie. Berechnen Sie den inneren Widerstand der Batterie.
- Wie groß ist die Stromstärke in der Batterie, wenn zwei dieser Verbraucher parallel an die Batterie angeschlossen werden?

- c) Nun ist lediglich ein Verbraucher mit  $R_V = 3,2\,\Omega$  angeschlossen. Wie groß ist jeweils die am inneren Widerstand und die an diesem Verbraucher umgesetzte Leistung?
- d) Welche Spannung liegt an diesem Verbraucher?

### 3 Elektromotoren und Grundbegriffe zu Wechselströmen

#### 3.1 Grundbegriffe

##### 3.1.1 Kinematik und Dynamik eines rotierenden starren Körpers

Wir gehen davon aus, dass sich ein starrer Körper pro Zeiteinheit  $dt$  um den Winkel  $d\varphi$  um eine Achse in Hinblick auf ein Koordinatensystem dreht. Dann wird die Winkelgeschwindigkeit durch

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

und die Winkelbeschleunigung durch

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

bestimmt. Der Vektor  $\vec{\omega}$  hat die Richtung der Drehachse.

Ist  $r'_i$  der Abstand des Masselements  $m_i$  (eines aus einer diskreten Masseverteilung  $m$  bestehende Körpers) von der  $z$ -Achse, so bezeichnet

$$J = \sum_i m_i r'^2_i$$

das *Trägheitsmoment* des Körpers. Ist die Masseverteilung kontinuierlich, so wird stattdessen

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} r'^2 \rho dV$$

als Trägheitsmoment definiert. Die *Rotationsenergie* lässt sich dann als

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

schreiben.

Greift eine Kraft  $\vec{F}$  in einem Punkt  $\vec{r}$  an, so ist das *Drehmoment*  $M$  durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

und der *Drehimpuls* durch

$$\vec{L} = J \vec{\omega}$$

erklärt. Weiterhin gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Für die *Beschleunigungsleistung*  $P$  lässt sich

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

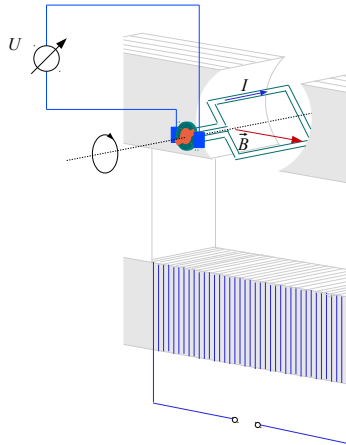
und die für die Arbeit  $W$ , bei konstantem Drehmoment  $\vec{M}$  in Richtung  $\vec{\omega}$ ,

$$\Delta W = M \Delta \varphi$$

schreiben.

### 3.1.2 Erzeugung von Wechselströmen

Die Drehung einer Leiterschleife innerhalb eines Magnetfeldes induziert in der Leiterschleife eine Spannung  $U$ .

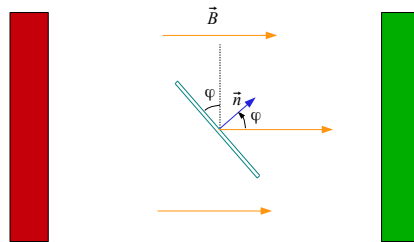


**Abbildung 3.1** Drehspulgenerator

Durch die Leiterschleife der Fläche  $A$  tritt der magnetische Fluss

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \varphi(t),$$

wobei  $\varphi = \angle(\vec{B}, \vec{n})$  ist.



**Abbildung 3.2** Leiterschleife im Magnetfeld

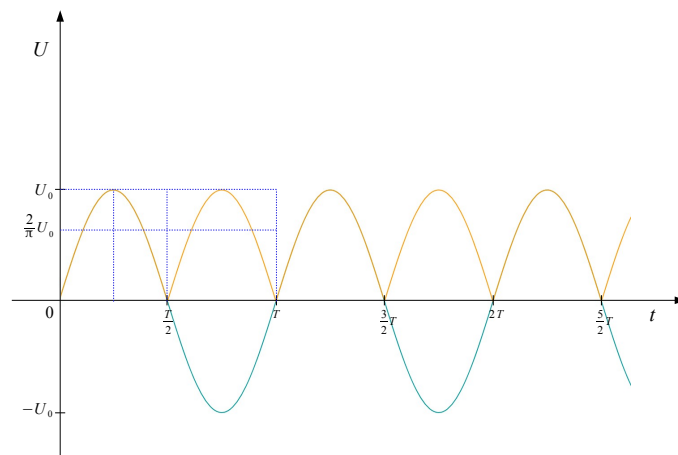
Dreht sich die Leiterschleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und gilt  $\varphi(t = 0) = 0$ , so wird in der Leiterschleife die Spannung

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = U_0 \sin(\omega t), \text{ wobei } U_0 := BA\omega,$$

induziert, wenn kein Kommutator verwendet wird. Wird an die Leiterschleife des Generators ein Kommutator angebracht, so ist es möglich, die Spannung

$$U = U_0 |\sin(\omega t)|$$

zu erzeugen. So wird pulsierender Gleichstrom, statt Wechselstrom erzeugt.



**Abbildung 3.3** Induzierte Spannung mit bzw. ohne Kommutator

Ist  $\omega = \text{const.}$ , so gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

wobei  $T$  für die Schwingungsdauer und  $\nu$  für die Drehfrequenz steht.

Deren Mittelwert  $\bar{U}$  beträgt

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 |\sin(\omega t)| dt = \frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt = \frac{2U_0}{T} \left( -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2U_0}{\omega T} (-\cos(\omega \frac{T}{2}) + 1) = \frac{2U_0}{2\pi} \cdot 2 = \frac{2U_0}{\pi}. \end{aligned}$$

## 3.2 Elektromotoren

### 3.2.1 Grundbegriffe

Der prinzipielle Aufbau eines Elektromotors entspricht dem eines Generators. Während aber Generatoren einen Teil der Bewegungsenergie in elektrische Energie umwandeln, nutzen Elektromotoren elektrische Energie zur Erzeugung von Bewegungsenergie. Auf die bewegten Ladungsträger wirkt im Magnetfeld die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

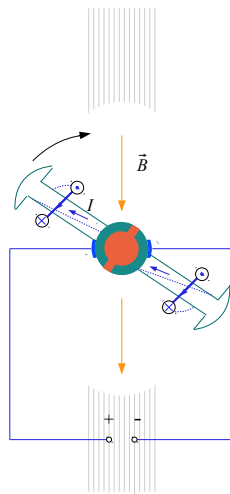


Abbildung 3.4 Gleichstrommotor

Mit Hilfe eines sich mit dem Rotator drehenden Kommutators wird die Stromrichtung umgepolt.

Auf die Leiterschleifen wird jeweils ein Drehmoment

$$\vec{M} = IA\vec{n} \times \vec{B}$$

ausgeübt und es gilt

$$M = |\vec{M}| = BAI \sin \varphi, \quad \text{wobei } \varphi = \angle(\vec{n}, \vec{B}).$$

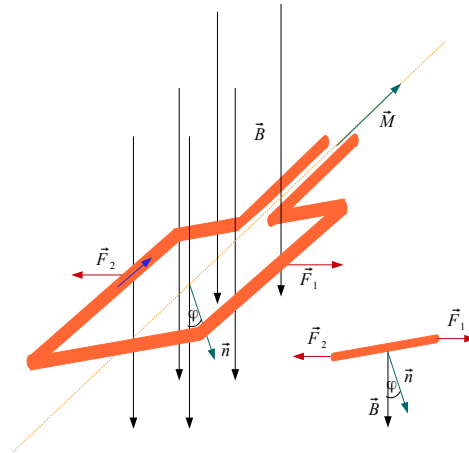


Abbildung 3.5 Drehmoment auf eine Leiterschleife

Da sich die mechanische Leistung durch

$$P_{\text{mech}} = M\omega$$

und die elektrische Leistung durch

$$P_{\text{el}} = UI$$

berechnen lässt, erhalten wir für den Wirkungsgrad  $\eta$  eines Elektromotors

$$\eta = \frac{M\omega}{UI}.$$

Mittels der Bewegungsgleichung des Rotors

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_L$$

und den Kennlinien  $M = M(\omega)$  lässt sich das Laufverhalten des Motors unter Last beschreiben. Dabei bezeichnet  $J$  das Trägheitsmoment des Rotors und  $M_L$  das Lastmoment.



### 3.2.2 Gleichstrommotoren

Der Spannungsabfall am Rotor ist gegeben als folgende Summe aus einem ohmschen und einem induktiven Spannungsabfall:

$$U_r = I_r R_r + \omega L I_s,$$

wobei die Indizes  $r$  und  $s$  für Rotor und Stator stehen.

Rotor und Stator können in Reihe (Reihenschluss- oder Hauptschlussmotor) oder parallel (Nebenschlussmotor) geschaltet werden.

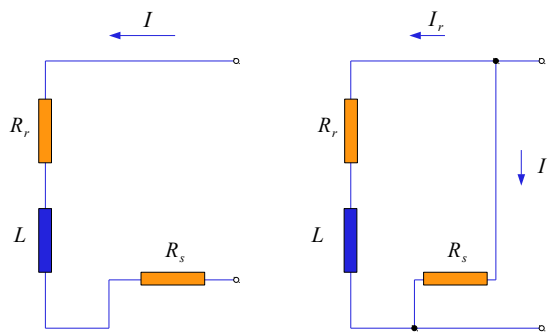


Abbildung 3.6 Reihenschluss und Nebenschluss

#### Ein einfaches Modell eines Gleichstrommotors

Wir betrachten eine von einem konstanten Strom  $I_A$  durchflossene Leiterschleife mit Anker in einem homogenen Magnetfeld  $B$ , deren Drehung durch die Lorentzkraft eine konstante senkrecht am Anker angreifende und durch Reibung verminderte Kraft, in Form einer Last, entgegenwirkt.

Die Lorentzkraft bedingt ein Drehmoment  $M_A$ , die Last ein Drehmoment  $M_L$  und die Reibung ein Drehmoment  $M_V$ .

Für die am Anker induzierte Spannung gilt

$$U_i(t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -BA \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t) = U_{i,0} \sin(\omega t),$$

mit  $U_{i,0} := BA\omega$ , wenn wir  $\varphi(t = 0) = 0$  annehmen. Wird ein Kommutator verwendet, so gilt

$$\bar{U}_i = \frac{2U_{i,0}}{\pi}.$$

Es liege eine Spannung  $U_A$  am Anker an. Sei  $R_A$  der Ohmsche Widerstand des Ankers. Dann können wir

$$U_A - \bar{U}_i = R_A I_A$$

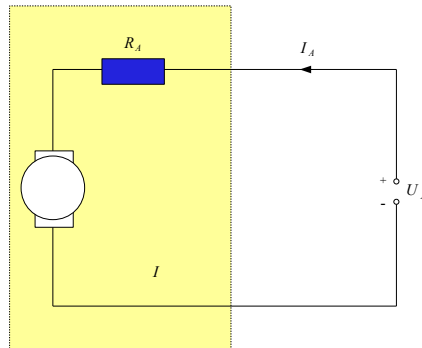
und somit

$$U_A = R_A I_A + \bar{\phi} \omega ,$$

mit

$$\bar{\phi} := \frac{2}{\pi} B A ,$$

schreiben.



**Abbildung 3.7** Ankerwiderstand

Weiterhin gilt

$$M_A = M_L + M_V$$

und, da

$$M = |\vec{M}| = B A I_A \sin \varphi ,$$

für das mittlere Drehmoment

$$\bar{M}_A = \bar{\phi} I_A .$$

Bei realen Motoren ist es üblich statt  $\bar{\phi}$  die technische Bezeichnung elektromotorische Konstante  $k_e$  zu verwenden. Wir erhalten damit

$$R_A I_A + k_e \omega = U_A$$

und

$$k_e I_A = M_L + M_V =: M_{eff},$$

wobei wir auf die Mittelwertbildung in der Notation der Einfachheit halber verzichten.

Im Falle eines Permanentmagnetfeldes oder einer Fremderregung ist  $k_e$  unabhängig von  $U_A$  und  $I_A$ . Bei Hauptschlussmotoren gilt

$$k_e = K I_A,$$

bei Nebenschlussmotoren

$$k_e = k U_A$$

mit Konstanten  $K, k$ .

(i) Für ein *Permanentfeld* oder eine *Fremderregung* erhalten wir

$$\omega = \frac{U_A}{k_e} - \frac{R_A}{k_e^2} M_{eff}.$$

Ist das Lastmoment maximal, d.h.  $M_L = M_{L,max}$ , so gilt  $\omega = 0$  und  $M_V \ll M_L$ . Somit lässt sich für  $\omega(M_L)$

$$\omega(M_L) = \omega_{max} \left(1 - \frac{M_L}{M_{L,max}}\right),$$

mit

$$\omega_{max} := \frac{R_A}{k_e^2} M_{L,max},$$

schreiben, wenn wir voraussetzen, dass  $M_V \ll M_L$  ist.

Mit  $\omega = \omega(U_A) = 0$  und  $M_L = 0$  erhalten wir die Minimalspannung  $U_{min}$ , die angelegt werden muss, damit sich der Rotor dreht. Für diese gilt

$$U_{A,min} = \frac{R_A}{k_e} M_V.$$

Die abgegebene mechanische Leistung des Motors beträgt

$$P_{mech} = M_L \cdot \omega(M_L) = \omega_{max} \left(M_L - \frac{M_L^2}{M_{L,max}}\right).$$

Wie sich leicht zeigen lässt, ist die mechanische Leistung bei

$$M_L = \frac{1}{2} M_{L,max}$$

maximal und es gilt

$$P_{mech}\left(\frac{1}{2}M_{L,max}\right) = \frac{1}{4}\omega_{max}M_{L,max}.$$

Da

$$R_A I_A = U_A - k_e \omega$$

und

$$I_A = \frac{M_{eff}}{k_A},$$

gilt

$$I_A(\omega) = \frac{U_A}{R_A} - \frac{k_e}{R_A} \omega = \frac{M_{eff}(\omega)}{k_e},$$

und demnach

$$I_{A,min} = I_A(\omega_{max}) = \frac{U_A}{R_A} - \frac{k_e}{R_A} \omega_{max} = \frac{U_A}{R_A} - \frac{1}{k_e} M_{L,max}.$$

Für die elektrische Leistung erhalten wir

$$P_{el} = U_A I_A = R_A I_A^2 + k_e \omega \frac{M_{eff}}{k_e} = R_A I_A^2 + \omega M_V + \omega M_L$$

und für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\omega M_L}{R_A I_A^2 + \omega M_V + \omega M_L} = \frac{1}{\frac{R_A I_A^2}{M_L \omega} + \frac{M_V}{M_L} + 1}.$$

(ii) Für einen *Hauptschlussmotor* erhalten wir

$$\omega = \frac{U_A}{K I_A} - \frac{R_A}{K^2 I_A^2} M_{eff}$$

und, mit

$$I_A = \sqrt{\frac{M_{eff}}{K}},$$

$$\omega = \frac{U_A}{\sqrt{K M_{eff}}} - \frac{R_A}{K}.$$

Demnach gilt

$$\lim_{M_{eff} \rightarrow 0} \omega(M_{eff}) = \infty.$$

(iii) Für einen *Nebenschlussmotor* erhalten wir

$$\omega = \frac{1}{k} - \frac{R_A}{k^2 U_A^2} M_{eff}.$$

### 3.2.3 Elektrische Antriebe

Der Arbeitspunkt gibt Drehzahl und Drehmoment vor und ergibt sich als Schnittpunkt der Motorkennlinie mit der Lastkennlinie der Arbeitsmaschine. Zwischen Motor und Arbeitsmaschine kann ein Getriebe eingesetzt werden, um die Werte für Drehzahl, Drehmoment oder Wirkungsgrad zu verändern.

#### *Beispiele für Lastkennlinien*

- (i) *Aufwickelmaschinen für Blech, Papier, etc.*

Mit

$$M = rF$$

erhalten wir

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{vF}{M}.$$

- (ii) *Kran, Aufzug*

Es gilt

$$M = rF = rm g$$

unabhängig von der Drehzahl.

- (iii) *Rührwerk, Gebläse*

Mit

$$F = cv^2 = cr^2\omega^2$$

und

$$M = 2rF$$

erhalten wir

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{2r^3c}}.$$

Verwenden wir ein Getriebe, so teilt sich die Leistung des Motors  $P_0 = M_0\omega_0$  auf die Leistung der Arbeitsmaschine  $A$  und die des Getriebes  $G$  auf. Hierbei gilt

$$M_0 = M_A \frac{\omega_A}{\omega_0} + \frac{P_G}{\omega_0} = M_A \frac{\omega_A}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\eta},$$

wobei  $\eta$  den Wirkungsgrad des Getriebes angibt.

### 3.3 Übungsaufgaben

#### Aufgabe 1

Ein Schwungrad mit  $J = 500 \text{ kgm}^2$  soll aus dem Stillstand beschleunigt werden. Das Drehmoment ist zeitlich konstant ( $3000 \text{ Nm}$ ).

- Wie lange dauert es, bis eine Drehzahl von  $480 \text{ min}^{-1}$  erreicht ist?
- Wie groß ist die vom Antrieb aufgebrauchte Arbeit?
- Wieviele Umdrehungen hat das Schwungrad bis zum Erreichen der Drehzahl  $100 \text{ min}^{-1}$  gemacht?

#### Aufgabe 2

Die Leistung von Motoren kann mit dem "Pronyschen Zaum" gemessen werden (siehe Praktikum). Dabei wird die Welle des Motors durch Reibung gebremst. Wie groß ist die Leistung eines Motors, der bei einer Anpresskraft der Bremsbacken an die Welle von  $530 \text{ N}$  eine Drehzahl von  $900 \text{ min}^{-1}$  hat? Die Welle hat  $20 \text{ cm}$  Durchmesser und die Reibungszahl  $\mu = 0,4$ .

#### Aufgabe 3

Welche mittlere Leistung muss der Antrieb eines Schwungrades mit

$$J = 14 \text{ Mgm}^2 (= 14 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2)$$

haben, wenn, bei konstantem Antriebsmoment, innerhalb  $30 \text{ s}$  aus dem Stand eine Drehzahl von  $90 \text{ min}^{-1}$  erreicht werden soll?

#### Aufgabe 4

Für einen Klein-Elektromotor mit Permanentmagnetfeld werden folgende Nenndaten angegeben:

$$U_N = 12 \text{ V}, \quad M_N = 6,5 \text{ Ncm}, \quad n_N = 3300 \text{ min}^{-1}, \quad I_N = 2,8 \text{ A}.$$

Die Leerlaufdrehzahl beträgt  $4200 \text{ min}^{-1}$ . Berechnen Sie

- die elektrische und mechanische Leistung bei Nennbetrieb und den Wirkungsgrad,
- das maximale Drehmoment, das der Motor liefern kann,
- die Drehzahl und den Strom bei einem Drehmoment von  $M = 15 \text{ Ncm}$ .

**Aufgabe 5**

Der Motor aus Aufgabe 4 wird bei Nennbedingungen betrieben und mit einem Planetengetriebe mit Übersetzungsverhältnis 4 : 1 und einem Wirkungsgrad von 80% mit der Welle eines Antriebs verbunden.

- a) Welche Drehzahl, welches Drehmoment und welche Leistung entstehen an der Welle?
- b) Wie groß ist der Gesamtwirkungsgrad von Motor und Getriebe?

**Aufgabe 6**

Ein Aufzug ( $m = 5\text{ t}$ ) wird mit einem Elektromotor betrieben. Die Trommel, auf der das Aufzugsseil aufgewickelt wird, hat einen Durchmesser von 25 cm.

- a) Welches Drehmoment muss der Motor aufbringen?
- b) Welche Drehzahl muss der Motor dabei haben, wenn der Aufzug 4 Stockwerke (12 m) in 20 s durchfahren soll?
- c) Welche Leistung bringt der Motor dann auf?
- d) Suchen Sie einen passenden Motor aus den zur Verfügung gestellten Tabellen aus. Welche Getriebeübersetzung wird benötigt?

**Aufgabe 7**

Für einen Klein-Elektromotor mit Permanentfeld werden folgende Nenndaten angegeben:

$$U_N = 9\text{ V}, \quad M_N = 6,5\text{ Ncm}, \quad n_N = 3500\text{ min}^{-1}, \quad I_N = 4,0\text{ A}.$$

Das maximale Drehmoment beträgt 36 Ncm.

- a) Berechnen Sie die Leerlaufdrehzahl.
- b) Berechnen Sie die Drehzahl, den Strom, die abgegebene mechanische und die aufgenommene elektrische Leistung und den Wirkungsgrad bei dem Drehmoment maximaler mechanischer Leistungsabgabe.
- c) Mit dem Motor wird über ein verlustfreies Getriebe ein Rührwerk betrieben, das bei 20 Umdrehungen pro Minute ein Drehmoment von 1500 Ncm benötigt. Welche Getriebeübersetzung sollte gewählt werden? Begründen Sie ggf. Ihre Wahl.

## 4 Wechselströme

### 4.1 Wechselstromwiderstände

Gehen wir davon aus, dass eine Spannung

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

an einem *Ohmschen Widerstand* anliegt, so beträgt die Stromstärke

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t)$$

und die Leistung

$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

Der zeitliche Mittelwert  $\overline{P}$  der Leistung beträgt

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R},$$

da

$$\int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx,$$

daher

$$2 \int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + x + C$$

und folglich

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{2} x \Big|_0^{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi.$$

Würde diese Leistung mittels Gleichspannung erreicht, so müsste die Spannung

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

anliegen. In Hinblick auf die anliegende Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$



und die Stromstärke

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

wird

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

als Effektivwert der Spannung und

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

als Effektivwert der Stromstärke bezeichnet.

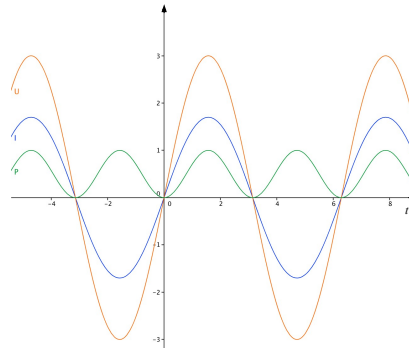
*Effektivwerte für Strom und Spannung* lassen sich auch für allgemeinere Wechselspannungen und allgemeinere Widerstände  $Z \in \mathbb{C}$  definieren.

Wird der elektrische Widerstand nur durch einen Ohmschen Verbraucher verursacht, so weisen Stromstärke  $I$  und die Spannung  $U$  keine Phasenverschiebung auf.

In diesem Falle ist  $P$  eine reine Wirkleistung.



**Abbildung 4.1** Stromstärke  $I$ , Spannung  $U$  und Leistung  $P$  für einen Ohmschen Widerstand



**Abbildung 4.2** Zeitlicher Verlauf der Stromstärke  $I(t)$ , Spannung  $U(t)$  und Leistung  $P(t)$  für einen Ohmschen Widerstand

Ersetzen wir den Ohmschen Widerstand durch eine *Spule*, so stellt sich der Strom durch die Spule so ein, dass

$$L \frac{dI(t)}{dt} = U(t)$$

gilt. Da wir  $I(t)$  als Zeiger in der komplexen Ebene auffassen, schreiben wir

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad \text{mit } I_0 \in \mathbb{R}.$$

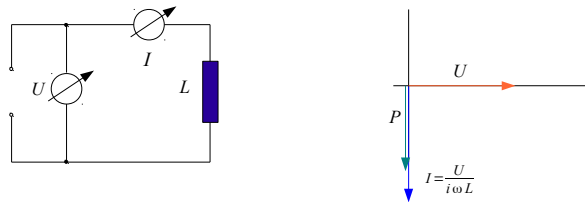
Für die Ableitung von  $I(t)$  gilt daher

$$\frac{dI(t)}{dt} = i\omega I(t).$$

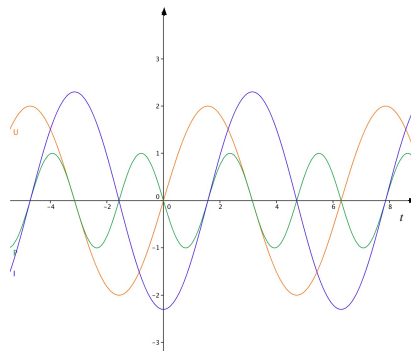
Wir erhalten

$$I(t) = \frac{U(t)}{i\omega L}.$$

Bei einer Spule ist  $P$  eine reine induktive Blindleistung.



**Abbildung 4.3** Stromstärke  $I$ , Spannung  $U$  und Leistung  $P$  für eine Spule



**Abbildung 4.4** Zeitlicher Verlauf der Stromstärke  $I(t)$ , Spannung  $U(t)$  und Leistung  $P(t)$  für eine Spule

Für einen *Kondensator* gilt

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

und somit

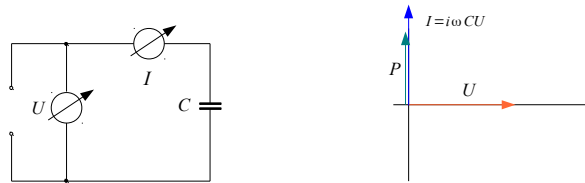
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt} = i\omega C U(t).$$

Bei einem Kondensator ist  $P$  eine reine kapazitive Blindleistung.

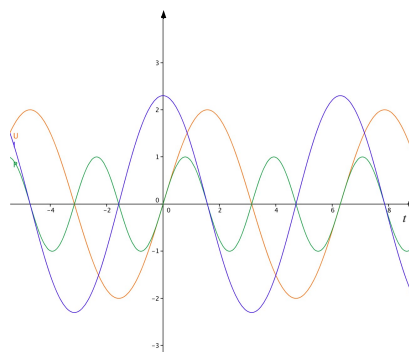
Mit  $Z \in \mathbb{C}$  bezeichnen wir den elektrischen Widerstand, gegeben durch

$$Z := \frac{U}{I}$$

und mit  $Y \in \mathbb{C}$  den Leitwert, gegeben durch den Kehrwert von  $Z$ .



**Abbildung 4.5** Stromstärke  $I$ , Spannung  $U$  und Leistung  $P$  für einen Kondensator



**Abbildung 4.6** Zeitlicher Verlauf der Stromstärke  $I(t)$ , Spannung  $U(t)$  und Leistung  $P(t)$  für einen Kondensator

Zusammengefasst gilt

- für den Ohmschen Widerstand

$$Z = R,$$

- für die Spule

$$Z = i\omega L$$

- und für den Kondensator

$$Z = \frac{1}{i\omega C}.$$

Durch Linearkombination dieser Widerstandswerte entstehen allgemeinere komplexe Widerstandswerte. Als komplexe Zahlen lassen sie sich folgendermaßen darstellen:

$$Z = \operatorname{Re}(Z) + i \operatorname{Im}(Z).$$

Die Zahl  $Z \in \mathbb{C}$  wird auch als *Impedanz* bezeichnet.

Der Anteil  $\operatorname{Re}(Z)$  gibt die Komponente der Spannung an, die mit dem Strom phasengleich ist. Dieser heißt *Wirkwiderstand*.

Der Anteil  $\operatorname{Im}(Z)$  heißt *Blindwiderstand*.

Bezeichnen  $I_{eff}$  und  $U_{eff}$  die Effektivwerte der Stromstärke bzw. Spannung und  $\varphi$  die Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung, so beträgt die (zeitlich gemittelte) *Wirkleistung*

$$P_w = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

und die (zeitlich gemittelte) *Blindleistung*

$$P_b = U_{eff} I_{eff} \sin \varphi .$$

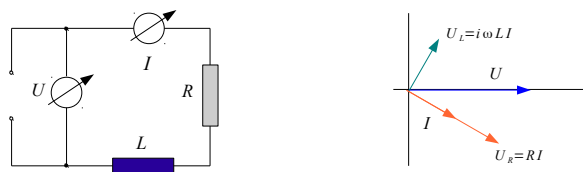
Sind ein Ohmscher Widerstand und eine Spule *in Reihe* geschaltet, so addieren sich deren Widerstände. Die Amplitude der Gesamtspannung beträgt

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Der Strom weist gegenüber der Spannung eine Phasenverschiebung  $\varphi$  mit

$$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

auf.



**Abbildung 4.7** Zeigerdiagramm für eine Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes und einer Spule

Hierbei konnten wir von folgenden Eigenschaften Gebrauch machen:

Es gilt

$$U = U_R + U_L = Z_R I + Z_L I = I(R + i\omega L) = IZ,$$

mit

$$Z = Z_R + Z_L.$$

Weiterhin gilt

$$|U| = |I||Z|,$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{Z \cdot \bar{Z}} \cdot \bar{Z} = \frac{U}{|Z|^2} \cdot (R - i\omega L)$$

und, zum in obiger Abbildung vorausgesetzten Zeitpunkt,

$$I = |I|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

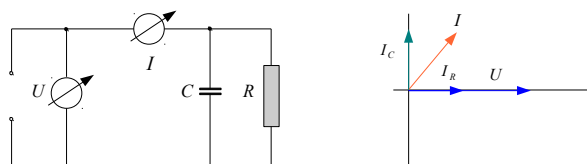
Sind ein Ohmscher Widerstand und ein Kondensator *parallel* geschaltet, so addieren sich deren Leitwerte. Die Amplitude des Gesamtstroms beträgt

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}.$$

Der Strom weist gegenüber der Spannung eine Phasenverschiebung  $\varphi$  mit

$$\tan \varphi = \omega C R$$

auf.



**Abbildung 4.8** Zeigerdiagramm für eine Parallelschaltung eines Ohmschen Widerstandes und eines Kondensators

Die Amplitude des Gesamtstroms und die Phasenverschiebung lassen sich folgendermaßen herleiten:

Mit

$$I = I_C + I_R = \frac{U}{Z_C} + \frac{U}{Z_R} = U \left( \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} \right) = U \left( i\omega C + \frac{1}{R} \right)$$

erhalten wir

$$|I| = |U| \left| i\omega C + \frac{1}{R} \right|.$$

Außerdem gilt

$$Z = (i\omega C + \frac{1}{R})^{-1} = \frac{1}{((i\omega C + R^{-1})(i\omega C - R^{-1}))} \cdot (i\omega C - R^{-1}),$$

folglich

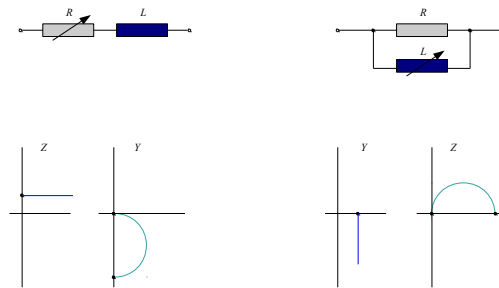
$$\bar{Z} \sim -i\omega C - R^{-1}$$

und daher

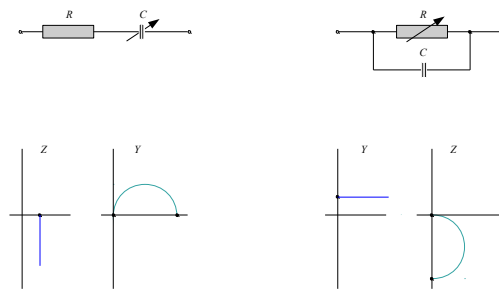
$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\omega C}{R^{-1}} = \omega C R.$$

Um den Einfluss einzelner Schaltungselemente zu untersuchen, bietet sich die Methode der *Ortskurven* an.

Hier betrachten wir einige Ortskurven zu einfachen Reihen- und Parallelschaltungen:



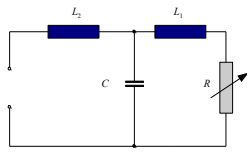
**Abbildung 4.9** Ortskurven für die Serien- und Parallelschaltung eines Ohmschen Widerstandes und einer Spule



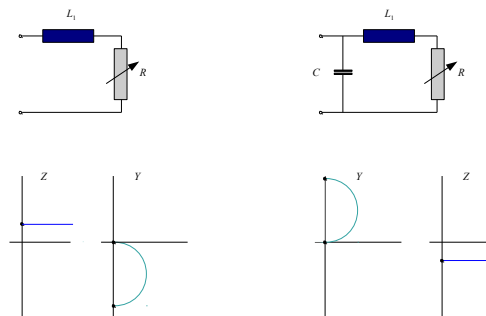
**Abbildung 4.10** Ortskurven für die Serien- und Parallelschaltung eines Ohmschen Widerstandes und eines Kondensators



Ausgehend von der abgebildeten Schaltung analysieren wir, ob es möglich ist  $L_1$ ,  $L_2$  und  $C$  so zu dimensionieren, dass Strom und Spannung, unabhängig vom Wert  $R$ , immer in Phase sind, und somit der Blindstrom verschwindet.



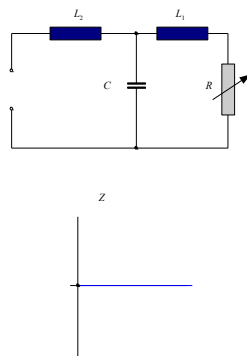
**Abbildung 4.11** Schaltung zu einer Blindstromkompensation



**Abbildung 4.12** Graphische Analyse einer Blindstromkompensation, Teil 1

Wie in der Abbildung dargestellt, wird

- die  $Z$ -Ortskurve des ersten Schaltungsabschnitts (Halbgerade im  $Z$ -Diagramm) auf einen Halbkreis im  $Y$ -Diagramm transformiert,
- dieser Halbkreis, durch Hinzufügen des Kondensators, um  $i\omega C$  verschoben und
- der Halbkreis im  $Y$ -Diagramm rücktransformiert auf eine Halbgerade im  $Z$ -Diagramm.



**Abbildung 4.13** Graphische Analyse einer Blindstromkompensation, Teil 2

Durch Hinzufügen von  $L_2$  wird die Halbgerade schließlich um  $i\omega L_2$  im  $Z$ -Diagramm verschoben.

Gilt außerdem

$$\omega L_1 = \omega L_2 = \frac{1}{\omega C},$$

so ist  $Z \in \mathbb{R}$ . Das bedeutet, dass  $I$  und  $U$  in Phase sind.

## 4.2 Anwendungen

### 4.2.1 Elektrische Energieversorgung mit Dreiphasen-Wechselstrom

Unter einem *Dreiphasen-* oder *Drehstromsystem* verstehen wir einen Generator, der mit drei um  $\frac{2\pi}{3}$  versetzten Spulen Wechselspannungen, die sich nur durch ihren zeitlichen Abstand  $\frac{T}{3}$  unterscheiden, erzeugt.

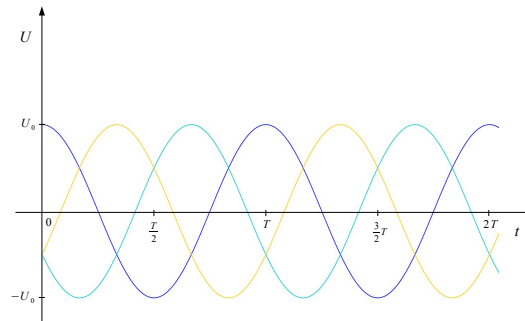


Abbildung 4.14 Zeitlich versetzte Wechselspannungen

Eine *Sternschaltung* weist drei Außenleiter  $R, S, T$ , einen Mittelpunkts- oder Nullleiter  $M$  und, in der Praxis, eine Erdleitung auf.

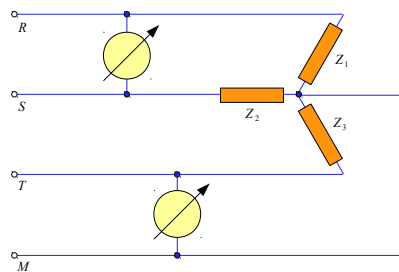
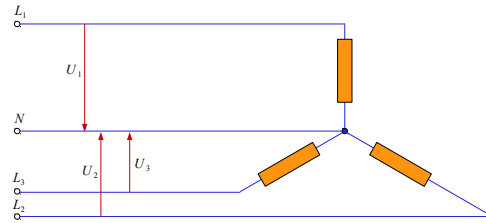


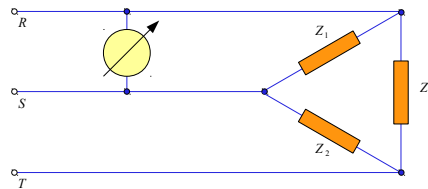
Abbildung 4.15 Drehstromverbindung mit Sternschaltung

In der folgenden Darstellung sind die Außenleiter mit  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  und der Mittelpunkts- oder Nullleiter mit  $N$  bezeichnet. Die Strangspannungen  $U_i$  sind die Spannungen zwischen  $L_i$  und  $N$  und die Außenleiterspannungen  $U_{ij} = U_i - U_j$  die Spannungen zwischen  $L_i$  und  $L_j$ .



**Abbildung 4.16** Eine weitere Darstellung einer Drehstromverbindung mit Sternschaltung

Bei einer *Dreieckschaltung* stehen drei Außenleiter  $R$ ,  $S$ ,  $T$  und, in der Praxis, eine Erdleitung zur Verfügung.



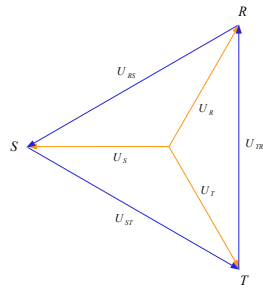
**Abbildung 4.17** Drehstromverbindung mit Dreieckschaltung

Die Spannungen  $U_{RS}$ ,  $U_{ST}$  und  $U_{TR}$  der *Sternschaltung* lassen sich mit Hilfe eines Spannungsdreiecks aus den Spannungen  $U_R$ ,  $U_S$  und  $U_T$  bestimmen. Dabei gilt

$$\angle(\vec{U}_R, \vec{U}_S) = \angle(\vec{U}_S, \vec{U}_T) = \angle(\vec{U}_T, \vec{U}_R) = \frac{2\pi}{3}$$

und für das symmetrische System

$$|U_R| = |U_S| = |U_T| =: U.$$



**Abbildung 4.18** Spannungsdreieck einer Sternschaltung

Demnach erhalten wir

$$U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = 2U \cos \frac{\pi}{3} = U\sqrt{3}.$$

Im Drehstromnetz gilt, bei gleicher Belastung, d.h.

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad \text{und} \quad \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3,$$

für die mittlere Gesamtleistung

$$\bar{P} = 3U_{i,eff}I_{i,eff} \cos(\Delta\varphi_i).$$

### 4.2.2 Transformatoren

Mit Hilfe von Transformatoren kann die Wechselspannungsamplitude verändert werden. Der Transformator besteht oft aus zwei Spulen unterschiedlicher Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ , die durch ein hochpermeables Material verbunden sind. Damit die Wirbelstromverluste klein sind, muss auch die effektive Leitfähigkeit des Spulenkerns klein sein.

Außerdem nehmen wir an, dass sich die ohmschen Verluste der Spulen vernachlässigen lassen, sich das  $B$ -Feld phasengleich zum Strom  $I$  ändert und der Magnetfluss  $\phi$  den Spulenkern nicht verlässt.

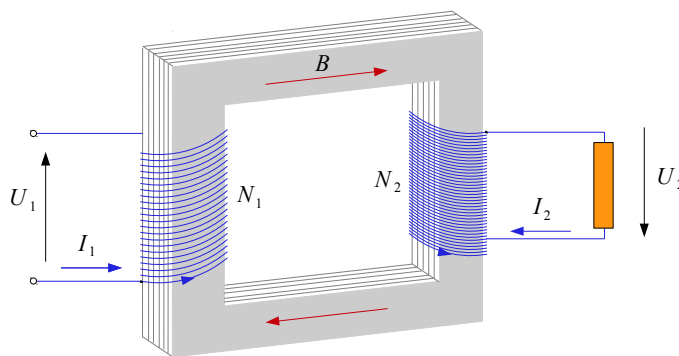


Abbildung 4.19 Transformator

An der Primärspule liegt die Spannung  $U_1$  an. Nach Voraussetzung ist der Widerstand der Spule rein induktiv. Daher gilt

$$U_1 = N_1 \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Dabei steht  $\phi$  für den Fluss durch eine Leiterschleife der Spule.

Die Flussänderung  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  wiederum, induziert in der Sekundärspule die Spannung

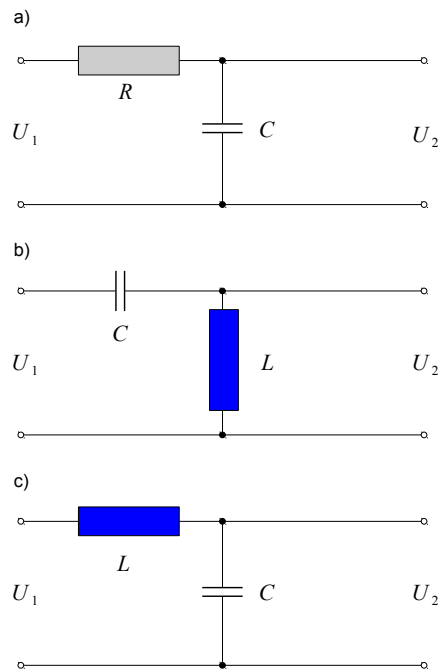
$$U_2 = -N_2 \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Somit erhalten wir für die Spannungstransformation

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}.$$

### 4.2.3 Einfache passive Netzwerke

Bereits durch Kombination folgender Bauteile lassen sich interessante Eigenschaften in Hinblick auf die Abhängigkeit der Ausgangsspannung von der Frequenz beobachten:



**Abbildung 4.20** Einfache passive Netzwerke

a) Es gilt

$$U_2 = U_1 \frac{(i\omega C)^{-1}}{R + (i\omega C)^{-1}} = U_1 \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

und daher

$$|U_2| = |U_1| \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

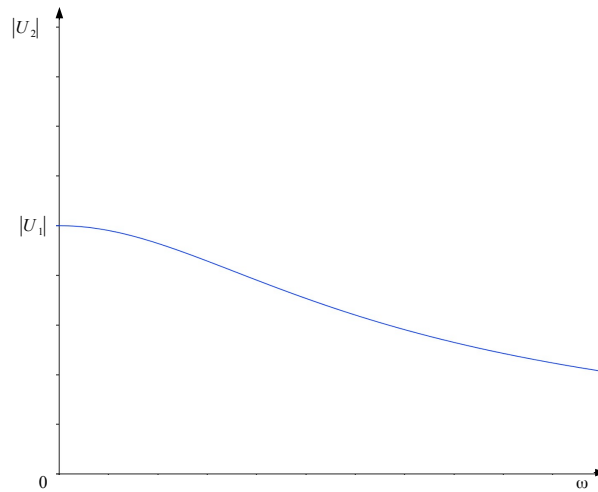


Abbildung 4.21 Tiefpass

b) Es gilt

$$U_2 = U_1 \frac{i\omega L}{(i\omega C)^{-1} + i\omega L} = U_1 \frac{\omega^2 L}{\omega^2 L - C^{-1}}$$

und daher

$$U_2 = U_1 \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1}$$

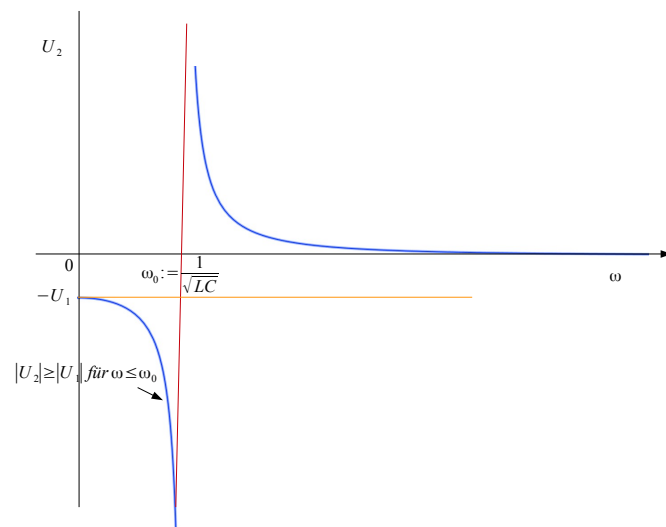


Abbildung 4.22 Schaltung mit Kondensator und Spule

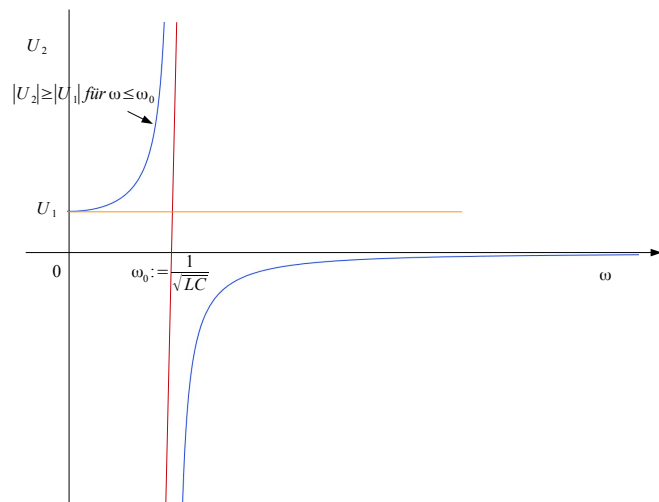


c) Es gilt

$$U_2 = U_1 \frac{(i\omega C)^{-1}}{i\omega L + (i\omega C)^{-1}} = U_1 \frac{1}{-\omega^2 LC + 1}$$

und daher

$$U_2 = U_1 \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$



**Abbildung 4.23** Weitere Schaltung mit Kondensator und Spule

## 4.2.4 Schwingkreise

### Der RLC-Serienschwingkreis

Hier genügt die Ladung  $Q(t)$  der Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t) = U_a(t),$$

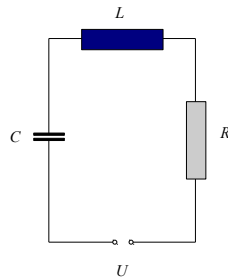
wobei

- Kapazität:  $C$
- Ohmscher Widerstand:  $R$
- Induktivität:  $L$ .

Zusätzlich liege eine äußere Spannung  $U_a(t)$  an, wobei

$$U_a(t) = U_0 \cos(\omega t).$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  und Amplitude  $U_0$  sind konstant.



**Abbildung 4.24** Serienschwingkreis mit äußerer Spannungsquelle

Für den RLC-Serienschwingkreis setzen wir

- $\omega_0 := \sqrt{\frac{1}{LC}}$
- $\delta := \frac{R}{2L}$
- $\omega_\delta := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

und erhalten aus obiger Differentialgleichung nun

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_a(t),$$

wobei  $x_a(t) = x_{0,a} \cos(\omega t)$  mit den Konstanten  $x_{0,a}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ .

Zusätzlich wird bei dieser erzwungenen Schwingung vorausgesetzt, dass  $0 < \delta < \omega_0$  gelte.

Wir betrachten hier Lösungen  $x(t) = x_\delta(t)$  der Differentialgleichung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

unter den Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0$$

und

$$x'(t=0) = 0.$$

*Schwingungen unter der Bedingung  $0 < \delta < \omega_0$*

Mit dem Ansatz  $x(t) = e^{\lambda t}$  und den Ableitungen  $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$  und  $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$  erhalten wir

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die komplexen Zahlen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega,$$

$$\text{wobei } \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{(-\delta+i\omega)t} + c_2 e^{(-\delta-i\omega)t}$$

lässt sich umformen zu

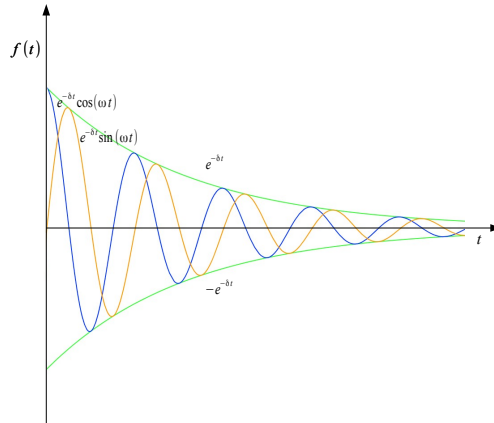
$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}).$$

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

erhalten wir

$$x(t) = e^{-\delta t} (d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)) .$$



**Abbildung 4.25** Gedämpfte Schwingungen

Mit den Anfangsbedingungen

$$x(t = 0) = x_0$$

und

$$x'(t = 0) = 0$$

erhalten wir

$$x_0 = x(t = 0) = e^{-\delta \cdot 0} (d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega \cdot 0))$$

und

$$0 = x'(t = 0) = -\delta e^{-\delta \cdot 0} (d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega \cdot 0)) \\ + e^{-\delta \cdot 0} (-d_1 \omega \sin(\omega \cdot 0) + d_2 \omega \cos(\omega \cdot 0)) .$$

Die erste dieser beiden Gleichungen impliziert

$$d_1 = x_0$$

und die zweite

$$d_2 = \frac{\delta}{\omega} \cdot x_0 .$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t) \right).$$

*Der aperiodische Grenzfall (für  $\delta = \omega_0$ )*

Die Lösung von

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ist

$$\lambda_{1,2} = -\delta.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t).$$

Unter der Anfangsbedingung  $x(t = 0) = x_0$  und  $x'(t = 0) = 0$  erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t),$$

wobei  $\delta = \omega_0$ .

*Der aperiodische Fall (Kriechfall) (für  $\delta > \omega_0$ )*

Die Lösungen von

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

sind

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$x(t) = c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t} \quad \text{wobei } \mu_i := -\lambda_i > 0.$$

Unter der Anfangsbedingung  $x(t = 0) = x_0$  und  $x'(t = 0) = 0$  erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung:

$$x(t) = \frac{x_0}{\mu_2 - \mu_1} (\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}).$$

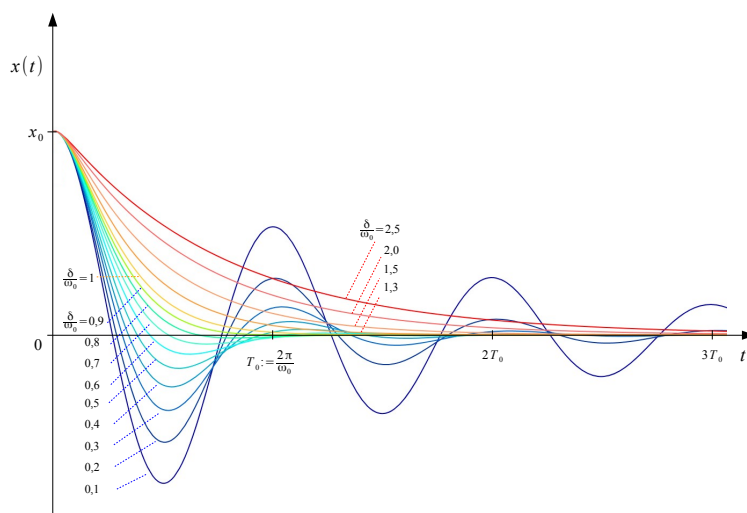
Demnach gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{2x(t)}{x_0} &= \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left( \left( \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - \left( \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right) \\
 &= \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left( \mu \left( e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right) + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \left( e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right) \right) \\
 &= 2e^{-\delta t} \left( \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \sinh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t) + \cosh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t) \right)
 \end{aligned}$$

und daher

$$x(t) = e^{-\delta t} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2}} \sinh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t) + \cosh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t) \right).$$

Die folgende Abbildung zeigt den Einfluss der Dämpfung auf diese Lösungen  $x(t) = x_\delta(t)$ :



**Abbildung 4.26** Der Einfluss der Dämpfung  $\delta$

Die allgemeine Lösung  $y$  einer inhomogenen linearen Differentialgleichung setzt sich zusammen

- aus der allgemeinen Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen Gleichung und
- einer partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung.

Dabei gilt

$$y = y_h + y_p.$$

In unserem Fall ist die *inhomogene Gleichung*

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_a(t)$$

und die zugehörige *homogene Gleichung*

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$z''(t) + 2\delta z'(t) + \omega_0^2 z(t) = x_{0,a} e^{i\omega t},$$

wobei  $\delta$ ,  $\omega_0$  und  $x_{0,a}$  wie bisher definiert sind.

Mit dem Ansatz

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)},$$

erhalten wir

$$A(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2) = x_{0,a} e^{-i\varphi}.$$

Daraus folgt für die Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$A = \frac{x_{0,a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

Mit der Amplitude  $A$  und der Phasenverschiebung  $\varphi$  ist auch die reelle partikuläre Lösung unserer ursprünglichen Gleichung

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

bestimmt.

Nun betrachten wir die Amplitude  $A$  als Funktion von  $\omega$  und berechnen deren Maximum.

Dabei erweist sich die folgende Definition als nützlich:

$$\omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Die Funktion  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(\omega) := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$$

ist

- für  $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ : streng monoton und unbeschränkt wachsend,
- für  $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ : streng monoton fallend in  $(0, \omega_R)$  und streng monoton und unbeschränkt wachsend in  $(\omega_R, \infty)$ .

Betrachten wir nun für den zweiten Fall die Amplitude

$$A = \frac{x_{0,a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

so zeigt sich, dass deren Maximalwert bei  $\omega = \omega_R$  angenommen wird und

$$A_{max} = A(\omega_R) = \frac{x_{0,a}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{x_{0,a}}{2\delta\omega_\delta}$$

beträgt.

Die Frequenz  $\omega_R$  ist daher *Resonanzfrequenz* für die Ladungsmenge  $Q$  und damit auch für die Spannung am Kondensator.

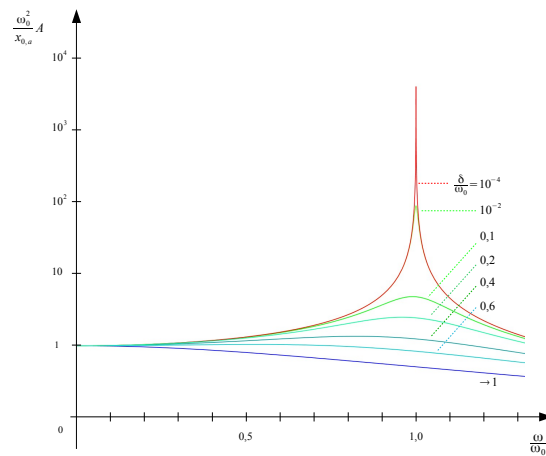
Amplitude  $A(\omega)$  und Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$  der partikulären Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

zeigen einen von der der relativen Dämpfung  $\frac{\delta}{\omega_0}$  abhängigen Verlauf.



Die Amplitude  $A(\omega)$  ist in folgender Abbildung für verschiedene Werte der relativen Dämpfung dargestellt:



**Abbildung 4.27** Amplitude einer erzwungenen Schwingung

Ersetzen wir  $x(t)$  durch die Ladungsmenge  $Q(t)$  und beachten, dass

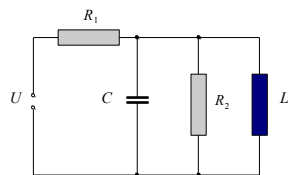
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

gilt, so erhalten wir  $I_\omega(t)$  in Abhängigkeit von  $\omega$ . Da der Wechselstromwiderstand  $Z$  bei  $\omega_0$  minimal ist, ist die Stromstärke bei  $\omega_0$  maximal.

## Parallelschwingkreise

Während sich das Verhalten eines Parallelschwingkreises mit realer Spule und realem Kondensator nicht einfach durch Übersetzen der Terme für Ströme und Widerstände des RLC-Serienschwingkreises in Terme für Spannungen und Leitwerte herleiten lässt, ist eine solche Analogiebildung bei stärkerer Idealisierung der Spule des Parallelschwingkreises möglich.

Die folgende Abbildung zeigt einen Parallelschwingkreis mit einem Parallelwiderstand  $R_2$ , realen Kondensator und einer idealen Spule, ohne vorgeschalteten Ohmschen Spulenwiderstand  $R_L$ .



**Abbildung 4.28** Parallelschwingkreis mit idealer Spule und mit äußerer Spannungsquelle

Bei konstanter Spannung  $U$  ist der Strom hier *minimal* bei  $\omega_0$ .

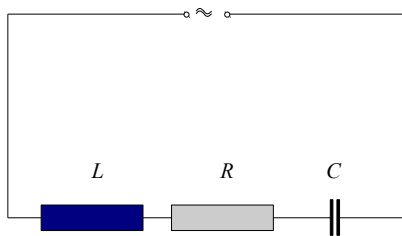
### 4.3 Übungsaufgaben

#### Aufgabe 1

Gegeben ist die abgebildete Schaltung mit den Werten

$$R = 500 \, \Omega, \quad L = 2,5 \, H, \quad C = 1,5 \, \mu F.$$

Die Schaltung wird an eine Wechselspannung mit  $\nu = 50 \, Hz$ ,  $\hat{U} = 220 \, V$  angeschlossen.



- Berechnen Sie den komplexen Gesamtwiderstand der Schaltung.
- Berechnen Sie die effektive Stromstärke im Stromkreis.
- Berechnen Sie die Leistungsaufnahme der Schaltung.
- Zeichnen Sie die Spannungsabfälle an  $R$ ,  $L$ ,  $C$  in ein Zeigerdiagramm ein.
- Bei welcher Frequenz ist der Betrag des Wechselstromwiderstandes minimal?

#### Aufgabe 2

Eine Schaltung besteht aus den Bauelementen

$$R = 100 \, \Omega, \quad C = 1,0 \, \mu F \text{ und } L = 10 \, mH.$$

Sie wird mit einer Wechselspannung der Frequenz  $500 \, Hz$  betrieben.

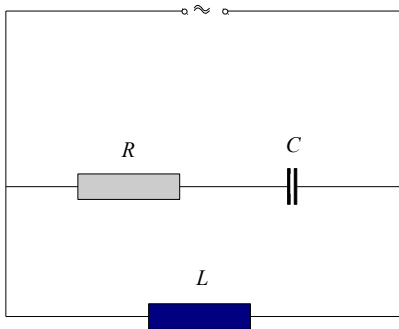
- Berechnen Sie die komplexen Widerstände und Leitwerte aller Bauelemente.
- Es werden  $R$  und  $C$  parallel geschaltet. Berechnen Sie den komplexen Widerstand dieser Zusammenschaltung.

- c) Zu der Schaltung aus b) wird die Induktivität in Serie geschaltet. Berechnen Sie den komplexen Widerstand der Gesamtschaltung.
- d) Berechnen Sie die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.
- e) Welchen Wert müsste die Induktivität haben, damit der Gesamtwiderstand der Schaltung reell ist?

### Aufgabe 3

Berechnen Sie den komplexen Wechselstromwiderstand der abgebildeten Schaltung bei  $\nu = 2500 \text{ Hz}$  in der Form  $Z = |Z|e^{i\varphi}$ . Hierbei gelte

$$R = 9 \text{ k}\Omega, \quad L = 0,3 \text{ H}, \quad C = 10 \text{ nF}.$$



### Aufgabe 4

In einem Stern-geschalteten Dreiphasen-Vierleiter-System betragen die effektiven Strangspannungen  $230 \text{ V}$ . Es werden drei Verbraucher  $Z_i$ , mit

$$Z_1 = (12 + i30) \Omega, \quad Z_2 = (40 - i20) \Omega \text{ und } Z_3 = (20 + i40) \Omega,$$

jeweils zwischen  $L_i$  und  $N$  geschaltet. Berechnen Sie den Gesamtstrom  $I_G$  (Effektivwert) in  $N$ . Wie lässt sich  $I_G = 0$  erreichen? Wie groß ist dann der Wirkungsgrad der Anlage?

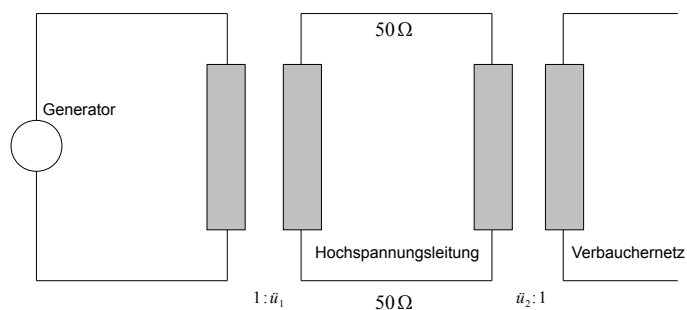
*Hinweis:* Zeichnen Sie entsprechende Zeigerdiagramme.

**Aufgabe 5**

Einem einphasigen Transformator wird sekundärseitig bei einer Spannung von  $6\text{ V}$  ein Strom von  $2,7\text{ A}$  entnommen. Die Primärspannung beträgt  $230\text{ V}$ . Wie groß ist der Strom in der Primärwicklung, wenn der Transformator als verlustlos angenommen wird?

**Aufgabe 6**

Ein Klein-Wasserkraftwerk hat einen Generator, der 50-Hz-Einphasen-Wechselspannung mit  $U_{eff,G} = 4\text{ kV}$  erzeugt. Zur Versorgung von  $20\text{ km}$  entfernten Verbrauchern wird eine Hochspannungsleitung aufgebaut, die aus zwei Drähten mit jeweils  $50\ \Omega$  Widerstand besteht. Zwischen Generator und Hochspannungsleitung und zwischen Hochspannungsleitung und Verbrauchernetz befinden sich jeweils Transformatoren (siehe Skizze). Der Innenwiderstand des Generators und die Verluste der Transformatoren werden nicht berücksichtigt. Die Spannung im Verbrauchernetz soll im Leerlauf (ohne zugeschaltete Verbraucher)  $U_{eff,V} = 230\text{ V}$  betragen, die Effektivspannung auf der Hochspannungsleitung  $25\text{ kV}$ .



- Berechnen Sie  $\ddot{u}_1$  und  $\ddot{u}_2$ .
- Berechnen Sie die Verlustleistung auf der Hochspannungsleitung, wenn eine Wirkleistung von  $20\text{ kW}$  übertragen wird, und die Spannung im Verbrauchernetz.
- Mit welchem Widerstand erscheint ein Verbraucher mit  $0,5\ \Omega$  Widerstand im Generatorstromkreis?
- Die generatorseitige Wicklung des Transformators hat 1000 Windungen. Wie viele Windungen hat die andere Wicklung?

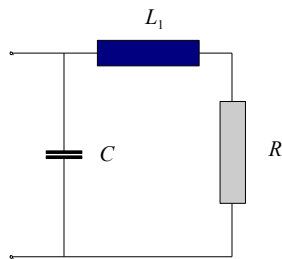
**Aufgabe 7**

Zwischen einem Hochspannungsnetz mit  $U_{eff} = 25 \text{ kV}$  und einer Anlage mit  $U_{eff} = 6 \text{ kV}$  ist ein einphasiger Transformator geschaltet.

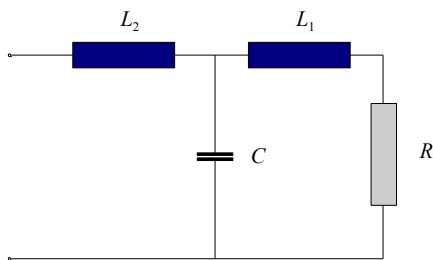
- a) Der Transformator besitzt auf der Primärseite (=  $25 \text{ kV}$ -Seite) eine Wicklung mit 1500 Windungen. Wie viele Windungen hat die Sekundärseite?
- b) Die Anlage im Sekundärkreis benötigt einen Effektivstrom von  $285 \text{ A}$ . Welchem Widerstand entspricht dies im Primärkreis?
- c) Ein neu zu beschaffendes Anlagenteil mit einem Leistungsbedarf von  $400 \text{ kW}$  kann sowohl mit  $6 \text{ kV}$  als auch mit  $25 \text{ kV}$  Versorgungsspannung geliefert werden. Es soll vom Transformator weit entfernt aufgebaut werden, so dass für jede der beiden Stromrichtungen eine  $400 \text{ m}$  lange Leitungen erforderlich ist, für die, aufgrund der Verhältnisse, nur Kupferdraht ( $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ) mit Querschnitt  $2 \text{ mm}^2$  verlegt werden kann. Wie viel Leistung geht in beiden Fällen in der Leitung verloren?
- d) Ab welcher Betriebsdauer lohnt sich die Beschaffung der  $25 \text{ kV}$ -Version? Diese kostet  $10\,000 \text{ €}$  mehr als die  $6 \text{ kV}$ -Version. Rechnen Sie mit einem Strompreis von  $12 \text{ ct/kWh}$ .

**Aufgabe 8**

Ein Ohmscher Widerstand mit  $R = 150 \, \Omega$ , eine Spule mit  $L_1 = 2,5 \, H$  und ein Kondensator mit  $C = (\omega^2 L_1)^{-1}$  werden an eine Wechselspannungsquelle mit  $\nu = 50 \, Hz$  und Spitzenspannung  $U_0 = 220 \, V$ , wie abgebildet, angeschlossen.



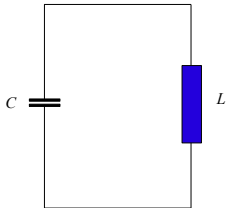
- Berechnen Sie den Gesamtwiderstand  $Z \in \mathbb{C}$  und  $|Z|$  der Schaltung.
- Nun wird eine Spule mit  $L_2 = L_1$ , wie abgebildet, der Schaltung hinzugefügt. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung.



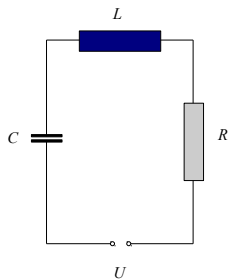
- Bestimmen Sie den Wert der Blindleistung der Schaltung und begründen Sie Ihr Ergebnis.

**Aufgabe 9**

Ein Serienschwingkreis ohne Ohmschen Widerstand bestehe aus einer Spule mit  $L = 0,5 \text{ mH}$  und einem Kondensator mit  $C = 2,2 \text{ nF}$ .



- Es liege keine äußere Spannung an, der Kondensator sei elektrisch geladen und kann sich über die Verbindung zur Spule entladen. Beschreiben Sie die Ursache für die auftretenden Ladungssoszillationen.
- Bestimmen Sie die Kreisfrequenz  $\omega_\delta$  des dabei entstehenden Wechselstroms, wenn zusätzlich ein Ohmscher Widerstand mit  $R = 0,8 \text{ k}\Omega$  in Reihe geschaltet wird.
- Nun wird, nach einem Entladevorgang, an diesen RLC-Serienschwingkreis eine äußere Spannung  $U_0 \cos(\omega t)$  mit  $U_0 = 325 \text{ V}$  und variabler Kreisfrequenz  $\omega$  angelegt.



Bestimmen Sie den Wert der maximalen Kondensatorladung.

- Der Ohmsche Widerstand wird auf  $R = 80 \Omega$  und dann auf  $R = 8 \Omega$ , bei sonst gleichen Bedingungen, gesenkt. Bestimmen Sie auch für diese RLC-Serienschwingkreise jeweils die maximale Kondensatorladung.



## 5 Überblick

*Das Coulombsche Gesetz für Punktladungen*

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

*Die elektrische Feldstärke*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

*Spannung zwischen den Punkten 1 und 2*

$$U_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

*Potential einer Punktladung*

$$U(r) := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

*Kapazität  $C$  von Kondensatoren*

$$Q = CU$$

*Elektrische Feldstärke innerhalb eines Plattenkondensators*

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

*Kapazität*

- eines Plattenkondensators

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

- eines Kugelkondensators

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

*Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren*

- Parallelschaltung

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

- Reihenschaltung

$$C^{-1} = \sum_{i=1}^n C_i^{-1}$$

*Ohmscher Widerstand*

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{\rho l}{A}, \text{ wobei } \rho \text{ der spezifische Widerstand ist}$$

*Parallel- und Reihenschaltung Ohmscher Widerstände*

- Reihenschaltung

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

- Parallelschaltung

$$R^{-1} = \sum_{i=1}^n R_i^{-1}$$

*Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

*Magnetische Feldstärke  $H$  und Flussdichte  $B$*

- eines geraden Leiters

$$H(r) = \frac{I}{2r\pi}$$

- einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius  $r$  im Punkt  $(0, 0, 0)$

$$H(r) = \frac{I}{2r}$$

- im Inneren einer langen Zylinderspule

$$H = I \frac{N}{l}$$

Im Vakuum gilt

$$B = \mu_0 H$$

*Induktionsgesetz*

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}, \text{ wobei } \phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

im Falle einer auf  $A$  konstanten Flussdichte

*Induktivität  $L$*

$$\phi = LI,$$

mit

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

für eine lange, leere Spule

*Kirchhoffsche Regeln*

- Knotenregel

$$\sum_i I_i = 0$$

- Maschenregel

$$\sum_i U_i = 0$$

*Leistung elektrischer Ströme bei konstanter Spannung*

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

*Rotationsbewegungen*

- Winkel-geschwindigkeit und -beschleunigung

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

- Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Beschleunigungsleistung

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

- Rotationsenergie

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

### *Gleichstrom-Elektromotor*

- Drehmoment auf Leiterschleife

$$M = B A I \sin \varphi$$

- Ankerspannung

$$R_A I_A + k_e \omega = U_A$$

- mittleres Drehmoment

$$k_e I_A = M_l + M_V = M_{eff}$$

- Winkelgeschwindigkeit bei Permanentfeld

$$\omega(M_L) = \omega_{max} \left(1 - \frac{M_L}{M_{L,max}}\right),$$

mit

$$\omega_{max} := \frac{R_A}{k_e^2} M_{L,max},$$

### *Wechselstromwiderstände, Impedanzen*

- für den Ohmschen Widerstand

$$Z = R,$$

- für die Spule

$$Z = i\omega L$$

- und für den Kondensator

$$Z = \frac{1}{i\omega C}.$$

*Elektrische Leistung*

- (zeitlich gemittelte) *Wirkleistung*

$$P_w = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

- (zeitlich gemittelte) *Blindleistung*

$$P_b = U_{eff} I_{eff} \sin \varphi .$$

*RLC-Reihenschaltung*

- Gesamtwiderstand

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

- Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung

$$\tan \varphi = (\omega L - \frac{1}{\omega C}) : R$$

*RLC-Parallelschaltung*

- Gesamtwiderstand  $Z$  mit

$$Z^{-1} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

- Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Spannung und Strom

$$\tan \varphi = R(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

*Spannungsverhältnis eines idealen Transformators*

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

## Notation und Konstanten

$E$ : elektrische Feldstärke

$D$ : Verschiebungsdichte

$H$ : magnetische Feldstärke

$B$ : magnetische Flussdichte

$\epsilon$ : Dielektrizitätskonstante

$\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante;  $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} CV^{-1}m^{-1}$

$\mu$ : Permeabilität

$\mu_r$ : Permeabilitätszahl

$\mu_0$ : magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante;  $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} VsA^{-1}m^{-1}$

$\chi$ : magnetische Suszeptibilität

## Literatur

- [1] C. Gerthsen, H. O. Kneser, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag
- [2] S. Goßner, *Grundlagen der Elektronik, Halbleiter, Bauelemente und Schaltungen*, Shaker Verlag
- [3] H. F. Grave, *Grundlagen der Elektrotechnik I, II*, Akademische Verlagsgesellschaft
- [4] A. Hammer, K. Hammer, *Taschenbuch der Physik*, J. Lindauer Verlag
- [5] H. Lindner, H. Bauer, C. Lehmann, *Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik*, Carl Hanser Verlag
- [6] J. Hugel, *Elektrotechnik, Grundlagen und Anwendungen*, B. G. Teubner
- [7] K. Simonyi, *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften