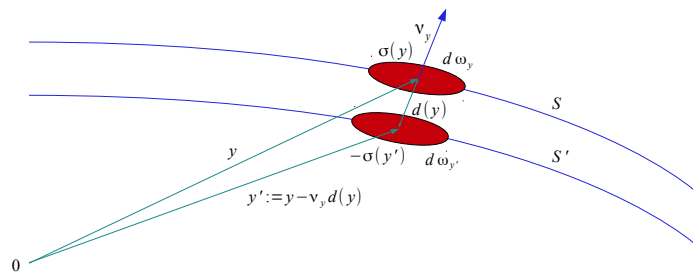


# Elektro- und Magnetostatik

**Dr. Jürgen Bolik**

*Technische Hochschule Nürnberg*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hölderräume, Distributionen und Integralsätze</b>	<b>4</b>
1.1	Hölderräume . . . . .	4
1.2	Distributionen . . . . .	7
1.3	Integration über Untermannigfaltigkeiten . . . . .	11
1.4	Integralsätze . . . . .	15
1.4.1	Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	15
1.4.2	Der Stokessche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
1.4.3	Die Greenschen Formeln . . . . .	20
1.5	Übungsaufgaben . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Das Dirichlet- und das Neumann-Problem für den Laplace-Operator</b>	<b>22</b>
2.1	Gewöhnliche Differentialoperatoren . . . . .	22
2.2	Die Mittelwerteigenschaft und das Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen . . . . .	29
2.3	Die Poisson-Gleichung und das Newton-Potential . . . . .	30
2.4	Das Dirichlet- und das Neumann-Problem für den Laplace-Operator . . . . .	33
2.5	Übungsaufgaben . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Elektro- und Magnetostatik</b>	<b>46</b>
3.1	Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	46
3.2	Elektrostatik . . . . .	52
3.2.1	Greensche Funktion für ein System aus einer Punktladung und einer leitfähigen Kugeloberfläche . . . . .	52
3.2.2	Potentiale für Randwerte auf einer leitfähigen Kugeloberfläche . . . . .	53
3.2.3	Potentiale für Randwerte auf einem Quader . . . . .	53
3.2.4	Felder in Ecken und auf Kanten . . . . .	55
3.2.5	Randwertprobleme mit azimuthaler Symmetrie . . . . .	56
3.2.6	Felder in kegelförmigen Ecken . . . . .	57
3.2.7	Randwertprobleme mit Zylindersymmetrie . . . . .	58
3.2.8	Entwicklung von Greenschen Funktionen in Kugelflächenfunktionen . . . . .	59
3.2.9	Entwicklung von Greenschen Funktionen mittels modifizierter Bessel- funktionen . . . . .	60
3.2.10	Multipol-Entwicklung . . . . .	61
3.2.11	Randwertprobleme in Dielektrika . . . . .	62
3.3	Magnetostatik . . . . .	64
3.3.1	Kräfte im Magnetfeld . . . . .	64
3.3.2	Der Hall-Effekt . . . . .	65
3.3.3	Das Gesetz von Biot-Savart . . . . .	67
3.3.4	Magnetisierung . . . . .	72
3.3.5	Das Vektorpotential . . . . .	74

3.3.6	Das Vektorpotential und die Magnetische Flussdichte für einen Kreisstrom . . . . .	75
3.3.7	Magnetfelder einer lokalen Stromverteilung . . . . .	76
3.3.8	Randwertprobleme in der Magnetostatik . . . . .	77
3.3.9	Homogen magnetisierte Kugel . . . . .	80
3.3.10	Magnetische Abschirmung . . . . .	81
3.4	Randwert- und Anfangswertprobleme . . . . .	82
3.5	Übungsaufgaben . . . . .	90

# 1 Hölderräume, Distributionen und Integralsätze

## 1.1 Hölderräume

Sei  $\alpha$  ein Multiindex, wobei

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n, \alpha_i \geq 0, |\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

und

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wir schreiben auch

$$D^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x)$$

mit

$$\partial_i^{\alpha_i} f(x) := \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} f(x).$$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wir schreiben

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig}\},$$

$$C^k(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } k - \text{mal stetig partiell differenzierbar}\},$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Die Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

wird als *Träger* von  $f$  bezeichnet. Damit definieren wir

$$C_0^0(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega\}$$

und

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_0^0(\Omega) \text{ für } k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

*Beispiel*

Die Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

gehört zu  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Ferner sei

$$C^0(\bar{\Omega}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist auf } \bar{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\},$$

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid D^\alpha f \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Für auf einer Menge  $S$  definierte beschränkte Funktionen  $g : S \rightarrow \mathbb{K}$  sei

$$\|g\|_{\sup} := \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Der Raum  $C^k(\bar{\Omega})$  ist, für eine beschränkte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , mit der Norm

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{\sup}$$

ein Banachraum.

**Hölder-Räume**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene beschränkte Menge und  $s \in \mathbb{R}_+^*$  mit

$$s = [s] + \{s\},$$

wobei  $[s] \in \mathbb{N}_0$  und  $0 < \{s\} < 1$ . Ferner sei

$$C^s(\bar{\Omega}) := \{f \in C^{[s]}(\bar{\Omega}) \mid \|f\|_{C^s(\bar{\Omega})} := \|f\|_{C^{[s]}(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} < \infty\}$$

Wir schreiben, mit  $k := [s]$  und  $\lambda := \{s\}$ , auch  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  statt  $C^s(\bar{\Omega})$ .

Für  $0 < s \leq 1$  heißt

$$\text{höl}_s(f, \bar{\Omega}) := \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

Hölder-Konstante von  $f$  auf  $\bar{\Omega}$  und

$$\text{lip}(f, \bar{\Omega}) := \text{höl}_1(f, \bar{\Omega})$$

Lipschitz-Konstante.

### Kompakta mit glattem Rand

**Definition 1.1** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann wird  $K$  als glatt oder  $C^1$ -berandet bezeichnet, falls es zu jedem Randpunkt  $x_0 \in \partial K$  eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  und eine Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi \in C^1(U)$  gibt, so dass

$$(i) \quad K \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\},$$

$$(ii) \quad \text{grad } \psi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U.$$

Es läßt sich zeigen, dass dann

$$\partial K \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}$$

gilt. Demnach ist der Rand eines Kompaktums  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$  ein Punkt, so schreiben wir  $T_{x_0}M$  für die Menge aller Tangentialvektoren an  $M$  in  $x_0$ .

**Lemma 1.2** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -berandetes Kompaktum. Dann existiert genau ein Vektor  $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \nu(x_0) \text{ steht senkrecht auf } T_{x_0}(\partial K),$$

$$(ii) \quad \|\nu(x_0)\| = 1,$$

$$(iii) \quad \text{Es gibt ein } \epsilon > 0, \text{ so dass}$$

$$x_0 + t\nu(x_0) \notin K \text{ für alle } t \in (0, \epsilon). \quad (1.1)$$

Ein Vektor  $\nu(x_0)$  mit diesen Eigenschaften wird als *äußerer Normalen-Einheitsvektor* von  $K$  im Punkt  $x_0$  bezeichnet.

## 1.2 Distributionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$$

und  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{D}$ . Wir schreiben

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi,$$

falls

(i) ein Kompaktum  $K \subset \Omega$  existiert, so dass

$$\text{supp}(\varphi_j) \subset K \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_0,$$

$$\text{supp}(\varphi) \subset K$$

und

(ii) die Folge  $(D^\alpha \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  für  $j \rightarrow \infty$ , für alle  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , gleichmäßig auf  $K$  gegen  $D^\alpha \varphi$  konvergiert.

**Definition 1.3** Eine Distribution ist eine stetige lineare Abbildung

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}, \varphi \mapsto T(\varphi),$$

wobei

a) die Linearität

$$T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi) \text{ für } \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

b) und die Stetigkeit

$$T(\varphi_j) \rightarrow T(\varphi) \text{ für } \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$$

bedeutet.

Die Gesamtheit der Distributionen wird mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet.

Für Distributionen  $T_1, T_2$  schreiben wir  $T_1 = T_2$ , wenn

$$T_1(\varphi) = T_2(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Unter dem Träger einer Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  verstehen wir die Menge aller Punkte  $x \in \bar{\Omega}$ , für welche die Einschränkung von  $T$  auf

$$\Omega \cap \{y \in \Omega \mid |y - x| < \delta\} \text{ für alle } \delta \in (0, \infty)$$

ungleich der Nulldistribution ist.

**Definition 1.4** Als  $\mathcal{E}'(\Omega)$  wird die Gesamtheit der Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\Omega)$  mit beschränktem Träger in  $\Omega$  bezeichnet.

**Definition 1.5** Unter  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  verstehen wir den Raum der Funktionen  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , die der Bedingung

$$\|\varphi\|_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k + 1) \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad (1.2)$$

genügen. Mit Hilfe der Norm  $\|\cdot\|_{k,l}$  schreiben wir

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi,$$

falls

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{k,l} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

gilt.

Die Gesamtheit der stetigen lineare Funktionale auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet. Der Raum  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  wird Raum der *temperierten Distributionen* genannt.

Eine Distribution  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  heißt *regulär*, wenn ein  $f \in L^1_{loc}$  existiert, so dass

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.3)$$

Distributionen, die nicht regulär sind, werden *singulär* genannt.

Es gilt

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$



*Beispiele*

(i) Die durch

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

definierte  $\delta$ -Distribution ist singulär.

(ii) Sei

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann gilt  $f \in L_{loc}^1((0, 1))$  und  $T_f$  nach (1.3) ist eine reguläre Distribution.

**Definition 1.6** Seien  $T_j, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ . Dann bedeutet die Konvergenz der Folge  $(T_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $T$  in  $\mathcal{D}'$ , d. h.

$$T_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

dass

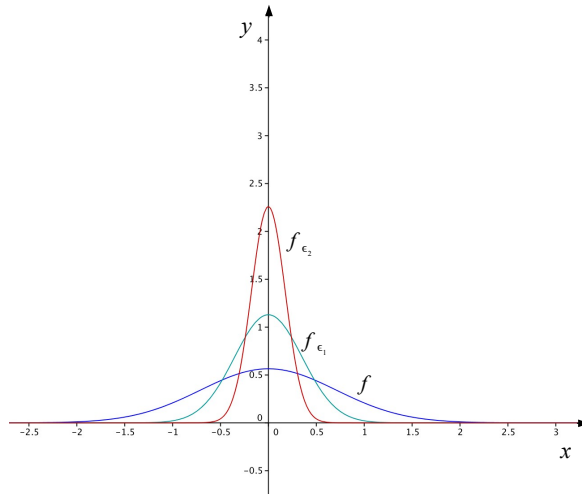
$$T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

*Beispiel*Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = 1$$

und für  $\epsilon > 0$  sei

$$f_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$



**Abbildung 1.1** Funktionen  $f_\epsilon$  für verschiedene  $\epsilon$

Weiterhin sei durch  $T_f$  eine reguläre Distribution erklärt. Dann gilt

$$T_{f_\epsilon} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0 \quad \text{für } \epsilon \searrow 0,$$

d. h.

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x) \varphi(x) d^n x = \delta_0(\varphi) = \varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

**Definition 1.7** Für  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  sind Differentiation und Multiplikation mit einer Funktion  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  definiert durch

$$(D^\alpha T)(\varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi(x))$$

und

$$(fT)(\varphi) = (f(x)T)(\varphi) = T(f(x)\varphi(x)).$$

Die Addition zweier Distributionen  $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ist durch

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\varphi) = \lambda_1 T_1(\varphi) + \lambda_2 T_2(\varphi), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},$$

erklärt.

### 1.3 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ferner gelte

$$M = \bigcup_{1 \leq j \leq m} V_j,$$

$T_j \subset \mathbb{R}^k$ ,  $j = 1, \dots, m$  sei offen und

$$\varphi_j : T_j \rightarrow V_j \subset M, \quad j = 1, \dots, m,$$

seien Karten. Zu der Überdeckung  $(V_j)_{1 \leq j \leq m}$  existiert eine untergeordnete, lokal-integrierbare Teilung der Eins  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq m}$ , wobei

$$\alpha_j : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Unter  $g_j$  verstehen wir die Gramsche Determinante

$$g := \det(g_{\nu\mu})$$

bezüglich  $\varphi_j$ , wobei der Maßtensor  $(g_{\nu\mu})$  aus Funktionen  $g_{\nu\mu} : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq \nu, \mu \leq k$  mit

$$g_{\nu\mu}(t) := \left( \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_\nu}, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_\mu} \right)$$

besteht.

#### Beispiel

Um den Maßtensor  $(g_{\nu\mu})$  für räumliche Polarkoordinaten zu bestimmen, definieren wir für ein festes  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Halbebene

$$H_\alpha := \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) \mid r \in \mathbb{R}_+^*, z \in \mathbb{R}\}$$

und die Punktmengen

$$T := \mathbb{R}^3 \setminus H_\alpha$$

und

$$V := \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \vartheta < \pi, \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha\}.$$

Mittels

$$\phi : T \rightarrow V, \quad (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$$

erhalten wir für die Funktionalmatrix

$$D\phi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Zumal

$$(g_{\nu\mu}) = (D\phi)^t(D\phi),$$

folgt, mit

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix},$$

dass

$$\sqrt{g} = r^2 \sin \vartheta.$$

**Definition 1.8** Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar über  $M$ , falls  $f|_{V_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , integrierbar ist, was wiederum bedeutet, dass

$$t \mapsto f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

über  $T_j$  integrierbar ist. Mit

$$\int_M f(x) d\omega_x = \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j(x) f(x) d\omega_x \tag{1.4}$$

und

$$\int_M \alpha_j(x) f(x) d\omega_x := \int_{T_j} \alpha_j(\varphi_j(t)) f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)} d^k t \tag{1.5}$$

ist die Integration von  $f$  über  $M$  erklärt.

Im Rahmen der Potentialtheorie tritt die Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel auf. Daher sollen nun einige Begriffe und Ergebnisse zu diesem Thema zusammengefasst werden.

### *Volumen und Oberfläche der $n$ -dimensionalen Einheitskugel*

Sei  $n \geq 2$ ,  $K_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$  die  $n$ -dimensionale Einheitskugel und  $S_{n-1} = \partial K_n$  die  $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre. Für das Volumen  $\tau_n$  von  $K_n$  gilt nach dem Cavalierischen Prinzip

$$\tau_n = \tau_{n-1} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Statt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

können wir auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

betrachten. Für

$$c_m := 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx, \quad m \in \mathbb{N},$$

gilt

$$c_0 = \pi, \quad c_1 = 2 \quad \text{und} \quad c_m = \frac{m-1}{m} c_{m-2} \quad \text{für } m \geq 2.$$

Somit erhalten wir

$$c_{2k} = \pi \prod_{m=1}^k \frac{2m-1}{2m},$$

$$c_{2k+1} = 2 \prod_{m=1}^k \frac{2m}{2m+1}$$

und folglich

$$c_{n-1} c_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Wegen

$$\tau_n = \tau_{n-1} \cdot c_n$$

ergibt sich daher die Rekursionsformel

$$\tau_n = \frac{2\pi}{n} \tau_{n-2}.$$

Mit Hilfe der Gamma-Funktion lässt sich auch

$$\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

schreiben. Die Oberfläche  $\omega_n$  der Einheitskugel ist definiert durch

$$\omega_n := \text{Vol}_{n-1}(S_{n-1}).$$

Es gilt

$$\tau_n = \int_{|x| \leq 1} d^n x = \int_0^1 \left( \int_{|x|=r} d\omega_x \right) dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n}$$

und demnach

$$\omega_n = n\tau_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

## 1.4 Integralsätze

Unter  $K \subset \mathbb{R}^n$  verstehen wir eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und unter  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$  die äußere Einheits-Normale.

### 1.4.1 Der Gaußsche Integralsatz

#### Interpretation des Gaußschen Integralsatzes

Der im Gaußschen Integralsatz dargestellte Zusammenhang lässt sich für ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^3$  folgendermaßen veranschaulichen:

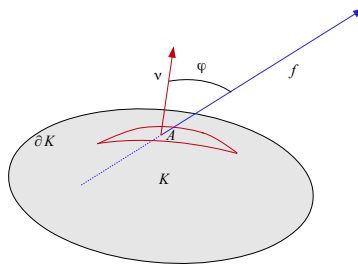


Abbildung 1.2 Feldlinie und Oberfläche

Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes  $f$

$$\int_A (f_{x_1} \cos(\nu, x_1) + f_{x_2} \cos(\nu, x_2) + f_{x_3} \cos(\nu, x_3)) d\omega_x$$

wird der *Fluss* des Vektors  $f$  durch die Fläche  $A$  genannt.

Statt dieses Oberflächenintegrals des Vektorfeldes  $f$  schreiben wir auch

$$\int_A (f(x), \nu(x)) d\omega_x = \int_A f_\nu(x) d\omega_x.$$

Sei  $f = f_{x_3}$ . Sind  $f_1$  und  $f_2$  die Werte des Vektorfeldes auf  $dA_1$  bzw.  $dA_2$ , so erhalten wir

$$f_1 \cos(\nu_1, x_3) dA_1 + f_2 \cos(\nu_2, x_3) dA_2 = (f_1 - f_2) dx_1 dx_2,$$

da  $\angle(\nu_1, x_3) = \varphi_1$  und  $\angle(\nu_2, x_3) = \pi - \varphi_1$  ist.

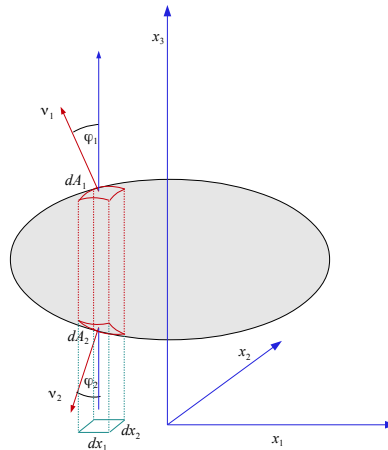


Abbildung 1.3 Querschnitt

Zumal

$$f_1 - f_2 = \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} dx_3$$

gilt, folgt

$$\oint f \cos(\nu, x_3) d\omega_x = \int \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} d^3x.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_K \operatorname{div} f(x) d^3x = \int_{\partial K} (f(x), \nu(x)) d\omega_x.$$

Dabei ist die Divergenz  $\operatorname{div}$  gegeben durch

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{x_3}}{\partial x_3}.$$

Demnach ist die Gesamttergiebigkeit der in  $K$  vorhandenen Quellen, gegeben durch

$$\int_K \operatorname{div} f(x) d^3x,$$

gleich dem Überschuss

$$\int_{\partial K} f_\nu(x) d\omega_x.$$



## Herleitung des Gaußschen Integralsatzes

**Lemma 1.9** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.

(i) Ist  $f \in C_0^1(U)$ , dann gilt

$$\int_U \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n. \quad (1.6)$$

(ii) Sind  $f \in C^1(U)$  und  $g \in C_0^1(U)$ , dann gilt

$$\int_U \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) d^n x = - \int_U f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} d^n x \quad \text{für } 1 \leq i \leq n. \quad (1.7)$$

**Beweis:** Da  $fg \in C_0^1(U)$  und

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

gilt, folgt die Aussage (ii) aus (i).

Setzen wir die Funktion  $f$  in Aussage (i) durch 0 auf  $\mathbb{R}^n$  fort, wählen  $i = 1$  und ein  $R \in \mathbb{R}_+^*$  so, dass

$$\text{supp } f \subset [-R, R]^n,$$

so erhalten wir, für ein festes  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) dx_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{x_1=-R}^{x_1=R} = 0$$

und demnach

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

□

**Lemma 1.10** Sei  $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Ferner sei

$$g : U' \rightarrow I$$

eine Funktion mit  $g \in C^1(U')$ ,

$$A := \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x')\},$$

und

$$B := \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n = g(x')\}.$$

Ist  $f : U' \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion aus  $C_0^1(U' \times I)$ , dann gilt

$$\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x = \int_B f(x) \nu_i(x) d\omega_x, \quad (1.8)$$

wobei

$$\nu_i(x) = -(1 + |\text{grad } g(x')|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g(x')}{\partial x_i} \text{ für } 1 \leq i \leq n-1,$$

$$\nu_n = (1 + |\text{grad } g(x')|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ .

**Satz 1.11** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiterhin sei  $K \subset U$  eine kompakte Teilmenge mit einem Rand  $\partial K$  der Klasse  $C^1$  und  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheits-Normalenfeld. Dann gilt

$$\int_K \text{div } f(x) d^n x = \int_{\partial K} (f(x), \nu(x)) d\omega_x. \quad (1.9)$$

**Beweis:** Da  $K$  kompakt ist, existiert zu jeder offenen Überdeckung von  $K$ ,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

mit offenen Mengen  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ , eine endliche Teilüberdeckung.

Entweder ist

$$U_i \subset K \setminus \partial K$$

oder wir können

$$U_i = U' \times (a, b), \text{ mit einer offenen Menge } U' \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

schreiben, wobei

$$g : U' \rightarrow (a, b)$$

mit

$$U_i \cap K = \{(x', x_n) \in U' \times (a, b) \mid x_n \leq g(x') \text{ bzw. } x_n \geq g(x')\}.$$

Wie sich leicht zeigen lässt, existiert eine Zahl  $\lambda > 0$ , so dass jede Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $V \subset K \neq \emptyset$  vollständig in einem  $U_i$  enthalten ist.

Sei

$$\epsilon := \frac{\lambda}{2} \sqrt{n}$$

und  $(a_{p\epsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$  eine Teilung der Eins.

Ferner sei  $P$  die endliche Menge aller Multiindizes  $p \in \mathbb{Z}^n$ , so dass

$$\text{supp}(\eta_{p\epsilon}) \cap K \neq \emptyset.$$

Dann gilt

$$\int_K \text{div } f(x) \, d^n x = \sum_{p \in P} \int_K \text{div}(\eta_{p\epsilon} f(x)) \, d^n x \quad (1.10)$$

und

$$\int_{\partial K} (f(x), \nu(x)) \, d\omega_x = \sum_{p \in P} \int_{\partial K} (\eta_{p\epsilon} f(x), \nu(x)) \, d\omega_x. \quad (1.11)$$

Demnach muss noch

$$\int_K \text{div}(\eta_{p\epsilon} f(x)) \, d^n x = \int_{\partial K} (\eta_{p\epsilon} f(x), \nu(x)) \, d\omega_x \quad (1.12)$$

bewiesen werden.

Ist  $U_i \subset K \setminus \partial K$ , so folgt die Aussage aus Lemma 1.9, sonst aus Lemma 1.10.

□

### 1.4.2 Der Stokessche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

**Satz 1.12** Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiterhin sei  $M \subset U$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, die durch ein Einheits-Normalenfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  orientiert sei. Es sei  $K \subset M$  ein Kompaktum mit einem Rand  $\partial K$  der Klasse  $C^1$  und

$$\tau : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein Einheits-Tangentialfeld, wobei  $\tau(p)$  für alle  $p \in K$  eine positiv orientierte Basis des Tangentialraums  $T_p(\partial K)$  bildet. Dann gilt

$$\int_{\partial K} (f, \tau) ds = \int_K (\operatorname{rot} f, \nu) d\omega. \quad (1.13)$$

### 1.4.3 Die Greenschen Formeln

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, für welches der Gaußsche Integralsatz gilt. Ferner seien  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ . Wie sich mittels

$$f = vDu, \quad w := Du = \operatorname{grad} u$$

und

$$\operatorname{div}(vw) = v \operatorname{div} w + (w, \operatorname{grad} v)$$

herleiten lässt, gelten dann

(i) die *erste Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\Omega} (Du, Dv) \, dx = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\omega_x \quad (1.14)$$

und

(ii) die *zweite Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial \Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\omega_x. \quad (1.15)$$

## 1.5 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Sei

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit

$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v).$$

Ferner sei  $\mathcal{F}$  die durch  $\phi$  gegebene orientierte Fläche, wobei die Orientierung so gewählt ist, dass der Normalenvektor  $\nu_{\mathcal{F}}$  im Punkt  $(0, 0, 1)$  die Richtung der positiven  $z$ -Achse hat. Weiterhin sei

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } (x, y, z) \mapsto w(x, y, z) = (y, x^2, x^2 + y^2).$$

Zeigen Sie, dass das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} (\operatorname{rot} w, \nu_{\mathcal{F}}) d\omega$$

existiert und berechnen Sie dessen Wert.

### Aufgabe 2

Gegeben seien das Kugelsegment

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4, z > 1\}$$

und das Vektorfeld

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto V(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Sei  $\nu$  das äußere Einheitsnormalenfeld auf  $\partial G$ . Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} (V, \nu) d\omega.$$

## 2 Das Dirichlet- und das Neumann-Problem für den Laplace-Operator

### 2.1 Gewöhnliche Differentialoperatoren

**Satz 2.1** Der Legendresche Differentialoperator

Sei

$$A : C^\infty(\overline{(-1, 1)}) \rightarrow C^\infty(\overline{(-1, 1)}), \quad x(t) \mapsto Ax(t) := -((1 - t^2)x'(t))'. \quad (2.1)$$

Der Operator  $A$  ist in  $L^2((-1, 1))$  wesentlich selbstadjungiert. Weiterhin gilt

$$\sigma(\bar{A}) = \sigma_p(\bar{A}) \quad (2.2)$$

und die Eigenwerte von  $\bar{A}$  sind

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.3)$$

wobei jeder Eigenwert einfach ist. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$P_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n} (1 - t^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.4)$$

Wählen wir

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1 - t^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5)$$

so bilden die Funktionen  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein vollständiges Orthonormalsystem in  $L^2((-1, 1))$ .

Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $P(t)$  ein Polynom in  $t$  und

$$(A_m x)(t) := -((1 - t^2)x'(t))' + \frac{m^2}{1 - t^2} x(t) \quad (2.6)$$

mit

$$D(A_m) = \{x(t) \mid x(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} P(t)\}. \quad (2.7)$$

Der Operator  $A_m$  ist in  $L^2((-1, 1))$  wesentlich selbstadjungiert. Weiterhin gilt

$$\sigma(\bar{A}_m) = \sigma_p(\bar{A}_m) \quad (2.8)$$

und die Eigenwerte von  $\bar{A}_m$  sind

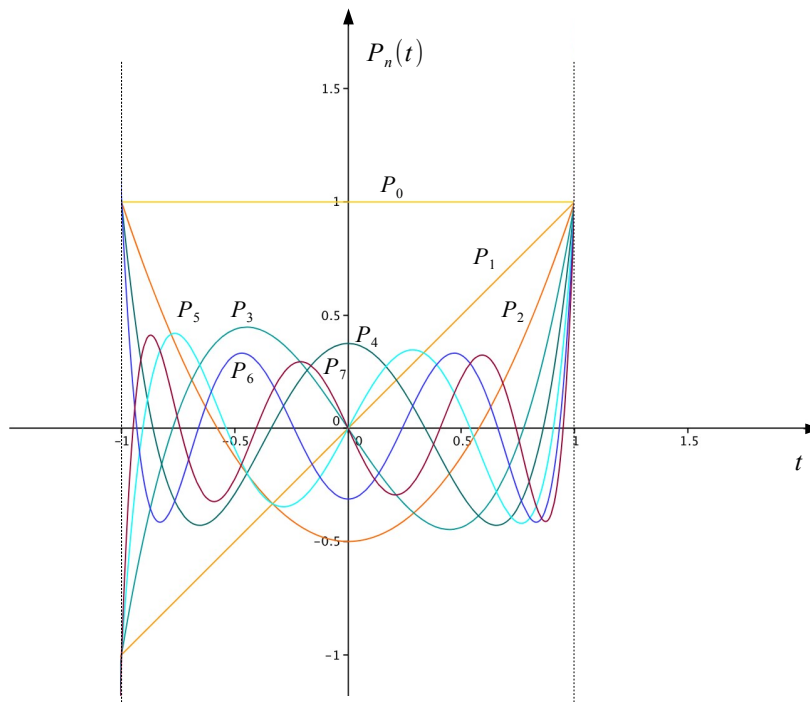
$$\lambda_n = n(n + 1), \quad n = m, m + 1, \dots, \quad (2.9)$$

wobei jeder Eigenwert einfach ist. Die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen sind

$$P_n^m(t) = \sqrt{\frac{(n - m)!}{(n + m)!}} (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(t), \quad n = m, m + 1, \dots, \quad (2.10)$$

wobei  $P_n^{(m)}(t)$  die  $m$ -te Ableitung des normierten Legendre-Polynoms (2.5) ist.

Setzen wir  $c_n^{-1} = (-1)^n 2^n n!$ , so erhalten wir, für  $n = 0, \dots, 7$ , folgende graphische Darstellung der Legendre-Polynome  $P_n(t)$ :



**Abbildung 2.1** Legendre-Polynome  $P_n(t)$

Verzichten wir auf den Normierungsfaktor in (2.10), so erhalten wir

$$P_n^m(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (1 - t^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, m = 0, 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Diese Funktionen werden als *zugeordnete Legendre-Funktionen* bezeichnet.

**Definition 2.2** Eine Funktion  $S : \omega_n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Kugelflächenfunktion vom Grad  $k \in \mathbb{N}$* , falls ein *homogenes Polynom  $P_k(x)$  vom Grad  $k$*  existiert, so dass

$$S(\vartheta) = \frac{1}{r^k} P_k(\vartheta), \quad (2.12)$$

mit  $r = |x|$ ,  $x = (r, \vartheta)$ , gilt.

**Satz 2.3** Sei  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Dann sind

$$S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!2\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, \dots, l, \quad (2.13)$$

$$\tilde{S}_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!2\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) \sin(m\varphi), \quad m = 1, \dots, l, \quad (2.14)$$

Kugelflächenfunktionen vom Grad  $l$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , auf  $\omega_3$ . Ferner ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} S_0^{(l)}, S_1^{(l)}, \dots, S_l^{(l)}, \tilde{S}_1^{(l)}, \dots, \tilde{S}_l^{(l)} \mid l \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (2.15)$$

ein vollständiges orthonormiertes System von Kugelflächenfunktionen und ein vollständiges orthonormiertes System von Eigenfunktionen des Beltrami-Operators  $B_3$  für  $n = 3$ .

Der Beltrami-Operator ist, für  $n = 3$ , erklärt durch

$$B_3 := -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad D(B_3) = C^\infty(\omega_3). \quad (2.16)$$

Es gilt

$$B_3(S_m^{(l)}) = l(l+1)S_m^{(l)} \quad \text{und} \quad B_3(\tilde{S}_m^{(l)}) = l(l+1)\tilde{S}_m^{(l)}.$$

Folgende Funktionen  $Y$  werden ebenfalls als Kugelflächenfunktionen bezeichnet:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \tilde{P}_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \dots, l, \quad (2.17)$$

wobei

$$\tilde{P}_l^m(x) := \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

Wir setzen

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) := (-1)^m Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi).$$



**Satz 2.4** Der Besselsche Differentialoperator

Sei  $\nu \in \mathbb{R}_+$  und

$$A_\nu : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad x(t) \mapsto A_\nu x(t) := -x''(t) - \frac{1}{t}x'(t) + \frac{\nu^2}{t^2}x(t). \quad (2.18)$$

Dann besitzt die Besselsche Differentialgleichung

$$A_\nu x(t) - x(t) = 0 \quad (2.19)$$

(i) die Besselsche Funktion erster Art  $J_\nu(t)$ ,

$$J_\nu(t) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2j}}{j! \Gamma(\nu+j+1)}, \quad (2.20)$$

in  $\mathbb{R}_+^*$  als Lösung. Die Reihen und die  $k$ -ten Ableitungen der Reihen konvergieren in  $[t_1, t_2]$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ , absolut und gleichmäßig.

(ii) die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_\nu(t) \int_t^\epsilon \tau^{-1} J_\nu^{-2}(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

in  $(0, \epsilon)$  mit einem  $\epsilon > 0$ , das hinreichend klein gewählt wird, und  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Definition 2.5** Für  $\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$  schreiben wir

$$J_{-\nu}(t) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2j-\nu}}{j! \Gamma(j+1-\nu)}. \quad (2.22)$$

Damit ist die Neumannsche Funktion (oder Besselsche Funktion zweiter Art)  $N_\nu(t)$  für nicht-ganzzahlige  $\nu$  durch

$$N_\nu(t) := \frac{J_\nu(t) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(t)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2.23)$$

expliziert. Hiermit wird die Neumannsche Funktion  $N_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , mittels

$$N_n(t) := \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(t), \quad \nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0, \quad (2.24)$$

definiert. Weiterhin werden die Hankelsche Funktionen erster und zweiter Art (oder Besselsche Funktionen dritter Art)  $H_\nu^{(1)}(t)$  sowie  $H_\nu^{(2)}(t)$  durch

$$H_\nu^{(1)}(t) := J_\nu(t) + iN_\nu(t) \quad (2.25)$$

und

$$H_\nu^{(2)}(t) := J_\nu(t) - iN_\nu(t) \quad (2.26)$$

expliziert.

Ist  $\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$ , dann sind  $J_\nu(t)$  und  $J_{-\nu}(t)$  linear unabhängig.

Die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 0 lautet

$$J_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j} \quad (2.27)$$

und die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 1

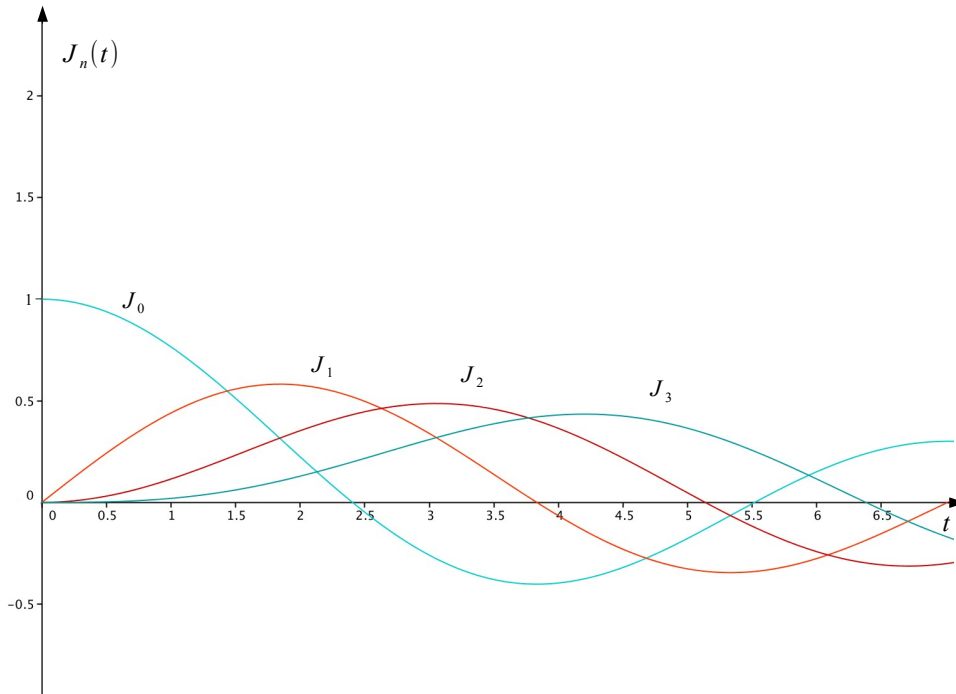
$$J_1(t) = \frac{t}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(j+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j}, \quad (2.28)$$

wobei  $t > 0$  sei. Mit dem Rekursionssatz

$$tJ_{\nu+1} - 2\nu J_{\nu} + tJ_{\nu-1} = 0, \quad t > 0, \nu \in \mathbb{R}_+^*$$

lassen sich nun leicht die Funktionen  $n$ -ter Ordnung mit  $n = 2, 3, \dots$  bestimmen.

Für  $n = 0, \dots, 3$ , erhalten wir folgende graphische Darstellung der Bessel-Polynome  $J_n(t)$ :



**Abbildung 2.2** Bessel-Polynome  $J_n(t)$

Sind  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$  zwei Nullstellen von  $J_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , so gilt

$$\int_0^1 x J_k(\eta_1 x) J_k(\eta_2 x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \eta_1 \neq \eta_2 \\ \frac{1}{2} J_{k+1}^2(\eta_1) = J'_k(\eta_1) & \text{für } \eta_1 = \eta_2. \end{cases} \quad (2.29)$$

Bessel-Funktionen lassen sich auch mit Hilfe parameterabhängiger Integrale definieren. Hierzu setzen wir

$$f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot e^{-ix \cos t} dt, \quad (2.30)$$

wobei  $p \in \mathbb{R}_+$ .

Die Reihe

$$e^{-ix \cos t} = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{x^m}{m!} \cos^m t$$

konvergiert gleichmäßig hinsichtlich  $t$ . Demnach gilt

$$f_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{x^m}{m!} \int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot \cos^m t dt. \quad (2.31)$$

Da  $f_p$  für ungerade  $m$  verschwindet, setzen wir  $m = 2k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$ . Es gilt

$$\int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot \cos^{2k} t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t \cdot \cos^{2k} t dt = B\left(p + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right), \quad (2.32)$$

wie sich nach Definition der Eulerschen Betafunktion

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q \in \mathbb{R}_+^*, \quad (2.33)$$

mittels der Substitution  $t := \sin^2 \varphi$  zeigen lässt. Mit Hilfe der Gamma-Funktion

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.34)$$

erhalten wir außerdem

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (2.35)$$

da

$$\int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int_0^\infty r^{2(p+q)} e^{-r^2} r^{-1} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{p+q} e^{-t} t^{-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma(p+q)$$

und

$$\begin{aligned}
 B(p, q)\Gamma(p + q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cdot \cos^{2q-1}\varphi \cdot r^{2p+2q-1} e^{-r^2} d\varphi dr \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \Gamma(p)\Gamma(q) .
 \end{aligned}$$

Die Bessel-Funktionen  $J_p$  werden nun durch

$$J_p : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto J_p(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} f_p(x) \quad (2.36)$$

erklärt. Diese lassen sich daher auch als Reihen mit

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k x^{2k}, \quad (2.37)$$

schreiben, wobei

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2k)!} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(p + k + 1)} .$$

Zumal

$$k! 2^{2k} \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = k! 2^k (2k-1)(2k-3) \cdot \dots \cdot 1 = (2k)!$$

und

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

folgt

$$c_k = \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(p + k + 1)} .$$

## 2.2 Die Mittelwerteigenschaft und das Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen

### Satz 2.6 Mittelwerteigenschaft

Sei  $f \in C^2(\Omega)$  harmonisch, d. h.

$$\Delta f = 0 \text{ in } \Omega.$$

Dann gilt, für jede Kugel  $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ ,

$$f(y) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} f \, d\omega \quad (2.38)$$

und

$$f(y) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_B f \, dx. \quad (2.39)$$

### Satz 2.7 Maximum- und Minimumprinzip

Sei  $f \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta f \geq 0$  bzw.  $\Delta f \leq 0$  in  $\Omega$ . Gibt es einen Punkt  $y \in \Omega$  mit

$$f(y) = \sup_{x \in \Omega} f(x)$$

bzw.

$$f(y) = \inf_{x \in \Omega} f(x),$$

dann ist  $u$  konstant.

**Satz 2.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  mit  $\Delta f \geq 0$  bzw.  $\Delta f \leq 0$  in  $\Omega$ . Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) = \sup_{x \in \partial \Omega} f(x)$$

bzw.

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \inf_{x \in \partial \Omega} f(x).$$

Ist  $f$  in  $\Omega$  harmonisch, dann gilt

$$\inf_{x \in \partial \Omega} f(x) \leq f(y) \leq \sup_{x \in \partial \Omega} f(x), \quad y \in \Omega.$$

**Satz 2.9** Seien  $f, g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  mit

$$\Delta f = \Delta g \text{ in } \Omega$$

und

$$f = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$f = g \text{ in } \Omega.$$

## 2.3 Die Poisson-Gleichung und das Newton-Potential

**Satz 2.10** Sei  $n \geq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$  und

$$G(x - y) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| & \text{für } n = 2 \end{cases} \quad (2.40)$$

Dabei bezeichnet  $\omega_n$  den Oberflächeninhalt der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  und es gilt

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (2.41)$$

Der Funktion  $G(\cdot, y) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ordnen wir mittels

$$T_G[\phi] := \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) \phi(x) dx \text{ wobei } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (2.42)$$

eine Distribution  $T_G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  zu. Der Einfachheit halber nennen wir diese ebenfalls  $G$ . Für diese gilt

$$\Delta G = \delta, \quad (2.43)$$

d. h.  $G$  ist Fundamentallösung des Laplace-Operators  $\Delta$ .

Außerdem gilt die Greensche Darstellungsformel

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G}{\partial \nu}(x - y) - G(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\omega_x + \int_{\Omega} G(x - y) \Delta u dx, \quad (2.44)$$

wobei  $y \in \Omega$ ,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet sei, für welches der Gaußsche Integralsatz gilt.

**Beweis:** Ist  $x \neq y$ , so gilt

$$\omega_n \partial_i G(x - y) = \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}, \quad (2.45)$$

$$\omega_n \partial_i \partial_j G(x - y) = \frac{|x - y|^2 \delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^{n+2}} \quad (2.46)$$

und daher

$$\Delta G(x - y) = 0. \quad (2.47)$$

Sei  $\epsilon > 0$ ,  $B_\epsilon = B_\epsilon(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \epsilon\}$ , so dass  $B_\epsilon \subset \Omega$ . Nach (1.15) gilt

$$\int_{\Omega \setminus B_\epsilon} G \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \left( G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) d\omega_x + \int_{\partial B_\epsilon} \left( G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) d\omega_x. \quad (2.48)$$

Mittels

$$\int_{\partial B_\epsilon} G \frac{\partial u}{\partial \nu} d\omega_x = G(\epsilon) \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\omega_x \leq \omega_n \epsilon^{n-1} G(\epsilon) \sup_{B_\epsilon} |Du| \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial B_\epsilon} = (\nabla G, \nu) \Big|_{\partial B_\epsilon} = \left( \omega_n^{-1} \frac{x - y}{|x - y|^n}, -\frac{x - y}{|x - y|} \right) \Big|_{\partial B_\epsilon} = -G'(\epsilon)$$

und

$$\int_{\partial B_\epsilon} u \frac{\partial G}{\partial \nu} d\omega_x = -G'(\epsilon) \int_{\partial B_\epsilon} u d\omega_x = -\frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon} u d\omega_x \rightarrow -u(y) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

folgt somit die Greensche Darstellungsformel (2.44).

Ist  $u \in C_0^2(\Omega)$ , so gilt demnach

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x - y) \Delta u(x) \, dx. \quad (2.49)$$

Mit Hilfe des Integraloperators  $G$ , lässt sich

$$\Delta G u = G \Delta u = u$$

schreiben.

□

Ist  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  harmonisch, so gilt

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\omega_x, \quad (2.50)$$

wobei  $y \in \Omega$ .

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f \in L^1(\Omega)$ . Als *Newton-Potential* mit Dichte  $f$  bezeichnen wir

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x-y) f(y) dy. \quad (2.51)$$

**Lemma 2.11** Sei  $f \in L^1(\Omega)$  beschränkt. Dann gilt für das Newton-Potential  $w$  von  $f$ :

(i)  $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,

(ii)  $\partial_i w(x) = \int_{\Omega} \partial_i G(x-y) f(y) dy, \quad i = 1, \dots, n, x \in \Omega.$

**Lemma 2.12** Sei  $f \in L^1(\Omega)$  beschränkt und sei  $f|_K \in C^\alpha(\bar{K})$ , mit  $0 < \alpha < 1$ , für alle  $K \subset\subset \Omega$ <sup>1</sup>. Dann gilt für das Newton-Potential  $w$  von  $f$ :

(i)  $w \in C^2(\Omega)$ ,

(ii)  $\Delta w = f$  in  $\Omega$ ,

(iii)  $\partial_i \partial_j w(x) = \int_{\Omega_0} \partial_i \partial_j G(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\Omega_0} \partial_i G(x-y) \nu_j(y) d\omega_y.$   
 $i, j = 1, \dots, n, x \in \Omega.$

Dabei bezeichnet  $\Omega_0 \supset \Omega$  ein Gebiet ist, für welches der Gaußsche Integralsatz gilt und  $\nu$  die äußere Einheitsnormale auf  $\partial\Omega_0$ . Die Funktion  $f$  ist durch Null auf  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  fortgesetzt.

**Satz 2.13** Sei  $n \geq 2$ .

(i) Ist  $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  und ist  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  eine Lösung von

$$\Delta T = U.$$

Dann lässt sich  $T$  als

$$T = U * G + P, \quad (2.52)$$

mit  $G$  gemäß (2.40) und einem harmonischen Polynom  $P$  darstellen.

---

<sup>1</sup>d.h.  $\bar{K}$  ist kompakt und  $\bar{K} \subset \Omega$



(ii) Ist  $U = u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  eine Funktion mit kompaktem Träger, so ist  $T$  eine reguläre Distribution mit

$$T(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) u(y) dy + P(x). \quad (2.53)$$

## 2.4 Das Dirichlet- und das Neumann-Problem für den Laplace-Operator

Im Folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten und  $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ .

**Definition 2.14** *Das innere Dirichlet-Problem*

Sei  $g \in C^0(\partial\Omega)$ . Gesucht ist eine Funktion  $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  mit

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$f|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

**Definition 2.15** *Das äußere Dirichlet-Problem*

Sei  $g \in C^0(\partial\Omega)$ . Gesucht ist eine Funktion  $f \in C^2(\hat{\Omega}) \cap C^0(\bar{\hat{\Omega}})$  mit

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$f|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$|u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

**Definition 2.16** *Das innere Neumann-Problem*

Sei  $g \in C^0(\partial\Omega)$ . Ist  $y \in \partial\Omega$ , so bezeichnen wir mit  $\nu_y$  die äußere Normale im Punkt  $y$ . Gesucht ist eine Funktion  $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , so dass

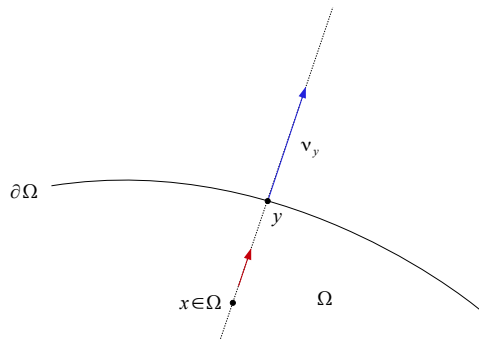
$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} \frac{\partial f(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial f(y)}{\partial \nu_y},$$

existiert. Dabei strebt  $x$  längs der Normalenrichtung  $\nu_y$  gegen  $y$ . Ferner gelte

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$



**Abbildung 2.3** Normale  $\nu_y$

**Definition 2.17** *Das äußere Neumann-Problem*

Sei  $g \in C^0(\partial\Omega)$ . Ist  $y \in \partial\Omega$ , so bezeichnen wir mit  $\nu_y$  die äußere Normale im Punkt  $y$ . Gesucht ist eine Funktion  $f \in C^2(\hat{\Omega}) \cap C^0(\bar{\hat{\Omega}})$ , so dass

$$\lim_{\hat{\Omega} \ni x \rightarrow y} \frac{\partial f(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial f(y)}{\partial \nu_y},$$

existiert. Dabei strebt  $x$  längs der Normalenrichtung  $-\nu_y$  gegen  $y$ . Ferner gelte

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$|f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

**Satz 2.18** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand, und  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  sei ebenfalls zusammenhängend.

- (i) Dann besitzen das innere Dirichletsche, das äußere Dirichletsche und das äußere Neumannsche Problem höchstens eine Lösung.
- (ii) Eine notwendige Voraussetzung für die Lösbarkeit des inneren Neumannschen Problem ist

$$\int_{\partial\Omega} g(y) d\omega = 0. \quad (2.54)$$

- (iii) Ist  $f(x)$  eine Lösung des inneren Neumannschen Problems, so ist  $f(x) + c$ , mit  $c \in \mathbb{R}$ , die allgemeine Lösung dieses Problems.

**Definition 2.19** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand und  $n \geq 3$ . Ferner sei  $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mu|_{\partial\Omega} \in C^0(\mathbb{R}^n)$  und  $G$  gegeben durch (2.40). Dann wird

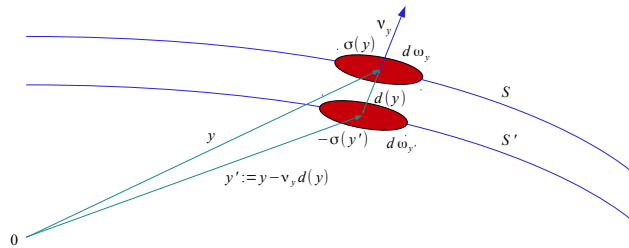
- (i) als Potential der einfachen Schicht die Funktion  $u$  mit

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} G(x - y) \mu(y) d\omega_y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.55)$$

- (ii) und als Potential der doppelten Schicht die Funktion  $v$  mit

$$v(x) := \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y) \right) \mu(y) d\omega_y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.56)$$

bezeichnet.

*Beispiel***Abbildung 2.4** Dipolschicht

Wir setzen  $4\pi\epsilon_0 = 1$ .

Es gilt

$$\phi(x) = \int_S \frac{\sigma(y)}{|x - y|} d\omega_y - \int_{S'} \frac{\sigma(y')}{|x - y'|} d\omega_{y'}.$$

Mit

$$D(x) := \lim_{d(x) \rightarrow 0} \sigma(x) d(x),$$

$$\xi = -\nu d,$$

$$\sigma(y') = \sigma(y) + o(|\xi|)$$

und der Taylor-Reihe

$$\frac{1}{|x + \xi|} = \frac{1}{x} + \left( \text{grad} \frac{1}{x}, \xi \right) + o(|\xi|)$$

erhalten wir, für  $d(x) \rightarrow 0$ ,

$$\phi(x) = \int_S D(y) (\nu_y, \text{grad}_y \frac{1}{|x - y|}) d\omega_y.$$

## Sprungrelationen

### Lemma 2.20 Sprungrelationen für das Doppelschichtpotential

Sei  $y \in \partial\Omega$  und  $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Dann gilt für das, in (2.56) definierte Potential  $v$  der doppelten Schicht

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} v(x) = \frac{1}{2} \mu(y) + v(y) = \mu(y) + \lim_{\hat{\Omega} \ni x \rightarrow y} v(x). \quad (2.57)$$

**Beweis:** Vorerst beschränken wir uns, für die Belegung des Doppelschichtpotentials, auf den Fall  $\mu(y) = 1$  für  $y \in \partial\Omega$ . Ist  $x \in \Omega$ , so existiert ein  $\epsilon_0 > 0$ , so dass

$$B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \epsilon\} \subset \Omega$$

für  $\epsilon \leq \epsilon_0$ . Mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel (1.15) zeigt sich, dass

$$\begin{aligned} v(x) &= - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{\partial G(x-y)}{\partial \nu_y} d\omega_y = - \frac{1}{\omega_n} \int_{|y-x|=\epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{y_j - x_j}{|x-y|^n} \cdot \frac{x_j - y_j}{|x-y|} d\omega_y \\ &= \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{|y-x|=\epsilon} d\omega_y = 1. \end{aligned}$$

Für  $x \in \partial\Omega$  betrachten wir

$$\partial\Omega_\epsilon := \partial\Omega \setminus (\partial\Omega \cap B_\epsilon), \quad B_\epsilon := B_\epsilon(x),$$

$$S_\epsilon := \partial B_\epsilon \cap \Omega.$$

Nach der zweiten Greenschen Formel folgt

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y) d\omega_y \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\Omega \setminus (\Omega \cap B_\epsilon)} \Delta G(x-y) dy - \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y) d\omega_y \end{aligned}$$

und demnach

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon} d\omega_y = \frac{1}{2}.$$

Für  $x \in \hat{\Omega}$  folgt, ebenfalls nach der zweiten Greenschen Formel,

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y) d\omega_y = \int_{\Omega} \Delta G(x-y) dy = 0.$$

Für  $\mu \in C^0(\partial\Omega)$  betrachten wir

$$v(x) = u(x) + w(x),$$

$x_0 \in \partial\Omega$  und

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(x_0) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y) d\omega_y,$$

$$w(x) := \int_{\partial\Omega} (\mu(y) - \mu(x_0)) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y) d\omega_y.$$

Ferner lässt sich zeigen, dass  $w$  im Punkt  $x_0$  stetig ist.

□

**Lemma 2.21** Sprungrelationen für das Einfachschichtpotential

(i) Für das in (2.55) definierte Potential  $u$  der einfachen Schicht existieren für jeden Punkt  $y \in \partial\Omega$  die Grenzwerte

$$\left( \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_i := \lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y} \quad (2.58)$$

und

$$\left( \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_a := \lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y}, \quad (2.59)$$

wobei  $x$  entlang  $\pm \nu_y$  gegen  $y$  konvergiert.

(ii) Sei

$$K(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y)$$

der Kern des Doppelschichtpotentials und

$$w(x) := \int_{\partial\Omega} K(y, x) \mu(y) d\omega_y.$$

Dann gilt

$$\left( \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_i = w(y) - \frac{\mu(y)}{2} = \left( \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_a - \mu(y). \quad (2.60)$$

*Beispiel*

Wir setzen  $\epsilon_0 = 1$ .

Nach dem Coulombschen Gesetz und dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\int_{\partial\Omega} (E, \nu) d\omega = q.$$

Da  $(E, \nu)$  auf beiden Seiten einer Einfachschicht sich lokal nur durch das Vorzeichen unterscheidet, gilt

$$((E_2 - E_1), \nu) = \sigma,$$

wobei die Bezeichnungsweise von  $E_1$  und  $E_2$  so ist, dass  $(E_2, \nu) > 0$  gilt.

Folglich gilt

$$(\partial_\nu U)_1 = \sigma + (\partial_\nu U)_2.$$

**Satz 2.22** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit einem  $C^2$ -Rand. Das Gebiet  $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  sei ebenfalls zusammenhängend. Ferner sei

$$K(x, y) := \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y)$$

und

$$(A\mu)(x) := \int_{\partial\Omega} K(x, y) \mu(y) d\omega_y.$$

- (i) Dann besitzen das innere und das äußere Dirichlet-Problem genau eine Lösung. Die Lösung des inneren Dirichlet-Problems lässt sich als Doppelschichtpotential  $v$  darstellen, wobei

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} v(x) = ((\frac{1}{2}I + A)\mu)(y) = g(y). \quad (2.61)$$

- (ii) Dann besitzt das äußere Neumann-Problem genau eine Lösung. Diese kann als Einfachschichtpotential  $u$  dargestellt werden, wobei

$$\left( \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_a = ((\frac{1}{2}I + A^*)\mu)(y) = g(y). \quad (2.62)$$

(iii) Dann besitzt das innere Neumann-Problem eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung, falls die Bedingung (2.54) erfüllt ist.

### Der Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Nach dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis lassen sich Vektorfelder  $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  folgendermaßen darstellen:

$$g = -\text{grad } U + \text{rot } A, \quad (2.63)$$

wobei  $U$  gegeben ist durch das skalare Potential

$$U(x) := \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \text{div}_y g(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{(\nu, g)(y)}{|x-y|} d\omega_y \right) \quad (2.64)$$

und  $A$  durch das solenoidale (=divergenzfreie) Vektorpotential

$$A(x) := \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \text{rot}_y g(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{(\nu \times g)(y)}{|x-y|} d\omega_y \right). \quad (2.65)$$



## 2.5 Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$  und  $r = \|x\|$ . Zeigen Sie, dass

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0, \quad \text{falls } n \geq 3,$$

und

$$\Delta \ln r = 0, \quad \text{falls } n = 2.$$

### Aufgabe 2

Sei  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ . Das *Newton-Potential* mit Dichte  $\rho$  ist gegeben durch

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \rho(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und

$$\Delta u = \rho.$$

### Aufgabe 3

Durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

lassen sich die Legendre-Polynome erklären. Beweisen Sie folgende Rekursionsformeln:

- a)  $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$
- b)  $(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)$
- c)  $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, n \in \mathbb{N}.$

**Aufgabe 4**

Sei  $p$  eine nichtnegative reelle Zahl und  $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot e^{-ix \cos t} dt.$$

Zeigen Sie, dass  $f_p$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$f_p''(x) + \frac{2p+1}{x} f_p'(x) + f_p(x) = 0, \text{ wobei } x \neq 0,$$

ist.

**Aufgabe 5**

Geben Sie  $J_{\frac{5}{2}}$  mittels transzendenter Funktionen an.

**Aufgabe 6**

*Der Satz von Liouville für harmonische Funktionen*

Die Funktion  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine beschränkte, harmonische Funktion. Zeigen Sie:

- Die Funktionen  $\partial_i u$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sind ebenfalls harmonische Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ .
- Nach Aufgabenteil a) gilt, aufgrund des Mittelwertsatzes für harmonische Funktionen,

$$\partial_i u(x) = \frac{n}{R^n \omega_n} \int_{B_R(x)} \partial_i u(y) dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } R > 0.$$

Folgern Sie, mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\partial_i u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

- Schließen Sie aus Aufgabenteil b), dass  $u$  konstant ist.

**Aufgabe 7**

Sei auf  $D = \{f \in C^2([0, 1]) \mid f(0) = f(1) = 0\}$  ein Differentialoperator  $L$  folgendermaßen erklärt

$$L : D \longrightarrow C^0([0, 1]) \quad Lf := f'' \quad \text{für } f \in D.$$

Zeigen Sie:  $L$  ist bijektiv (d. h. die Gleichung  $Lf = g$  ist für jedes  $g \in C^0([0, 1])$  eindeutig lösbar), und mit der Greenschen Funktion

$$G(x, y) = \begin{cases} (x-1)y & : 0 \leq y \leq x \\ x(y-1) & : x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

gilt

$$(L^{-1}g)(x) = \int_0^1 G(x, y)g(y) dy.$$

### Aufgabe 8

Bestimmen Sie eine reguläre Lösung  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  von

$$(D^2 - 1)G = -\delta.$$

### Aufgabe 9

Sei  $K_0 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow |z|^{-1}$ , sowie für  $h > 0$  eine Funktion  $K_h : \mathbb{R}^3 \ni z \longrightarrow (|z|^2 + h)^{-\frac{1}{2}}$  gegeben. Ferner sei  $B_r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r\}$  mit  $r > 0$ , sowie  $f \in C^1(\bar{B}_1)$  und für  $h \geq 0$

$$\mathbb{R}^3 \ni x \longrightarrow F_h(x) := \int_{B_1} K_h(x - y)f(y) dy.$$

- a) Warum ist  $F_0$  wohldefiniert? Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von  $K_h$ , und zeigen Sie, dass für  $h \geq 0$ ,  $1 \leq l, m \leq 3$  und  $z \in \mathbb{R}^3$

$$|\partial_l K_h(z)| \leq |z|^{-2} \quad \text{und} \quad |\partial_m \partial_l K_h(z)| \leq 4|z|^{-3}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\Delta K_0(z) = 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$\int_{\partial B_1} \sum_{l=1}^3 \partial_l K_0(x - y) y_l d\omega_y = 4\pi \quad \text{mit } x \in B_1.$$

- b) Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^3 : |\alpha| \leq 2$ ,  $1 \leq l \leq 3$ , sowie  $x \in \mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_{B_1} \partial_l K_0(x - y)f(y) dy$$

existiert, und für  $h > 0$

$$F_h \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{und} \quad D_x^\alpha F_h(x) = \int_{B_1} D_x^\alpha K_h(x - y)f(y) dy$$

gilt.

- c) Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt, sowie  $\alpha \in \mathbb{N}_0^3 : |\alpha| \leq 1$ . Zeigen Sie, dass für  $x \in G$  und  $h \rightarrow 0$

$$\int_{B_1} D_x^\alpha K_h(x-y)f(y) dy \longrightarrow \int_{B_1} D_x^\alpha K_0(x-y)f(y) dy$$

sowie für  $1 \leq l, m \leq 3, x \in B_1$  und  $h \rightarrow 0$

$$\int_{B_1} \partial_l \partial_m K_h(x-y)f(y) dy \longrightarrow \int_{B_1} \partial_l \partial_m K_0(x-y)f(y) dy$$

gleichmäßig konvergieren.

Sei  $r \in (0, 1)$  und  $1 \leq l, m \leq 3$ . Zeigen Sie, dass für  $x \in B_r(0)$  und  $h \rightarrow 0$

$$\int_{\partial B_1} \partial_l K_h(x-y)y_m d\omega_y \longrightarrow \int_{\partial B_1} \partial_l K_0(x-y)y_m d\omega_y$$

gleichmäßig konvergiert.

- d) Folgern Sie aus den vorangegangenen Ergebnissen, dass  $F_0|_{B_1} \in C^2(B_1)$  sowie, für  $x \in B_1$  und  $1 \leq l, m \leq 3$ ,

$$\begin{aligned} \partial_l \partial_m F_0(x) &= \int_{B_1} \partial_l \partial_m K_0(x-y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_l K_0(x-y)y_m d\omega_y \\ \Delta F_0(x) &= -4\pi f(x). \end{aligned}$$

- e) Sei  $d : (x, y) \in \bar{B}_1 \times \bar{B}_1 \mapsto d(x, y) := 1 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2$ . Für  $x \in B_1 \setminus \{0\}, y \in B_1$  gilt

$$x|x|^{-2} - y \neq 0 \quad \text{und} \quad |x|^{-1}K_0(x|x|^{-2} - y) = d(x, y)^{-\frac{1}{2}}$$

sowie für  $x \in B_1, y \in B_1$

$$d(x, y) \geq (1 - |x|)^2 \quad \text{und} \quad \Delta_x(d(x, y)^{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

- f) Seien

$$H_1 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x|^{-1}F_0(x|x|^{-2}) \quad \text{und} \quad H_2 : B_1 \ni x \mapsto \int_{B_1} d(x, y)^{-\frac{1}{2}}f(y) dy.$$

Zeigen Sie, dass:

- (i)  $H_1 \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  und für  $x \in \partial B_1$ :  $H_1(x) = F_0(x)$
- (ii)  $H_2$  wohldefiniert,  $H_2 \in C^2(B_1)$  und  $\Delta H_2|_{B_1} = 0$ .
- (iii)  $H_1|_{B_1 \setminus \{0\}} = H_2|_{B_1 \setminus \{0\}}$ .

- g) Sei die Greensche Funktion  $G : \{(x, y) \in \bar{B}_1 \times B_1 \mid x \neq y\} \longrightarrow \mathbb{R}$  zum Laplace-Operator und Kugel  $B_1$  folgendermaßen definiert

$$G(x, y) := -\frac{1}{4\pi}(K_0(x - y) - d(x, y)^{-\frac{1}{2}}).$$

Sei  $f \in C^1(\bar{B}_1)$ . Zeigen Sie, dass

$$g : \bar{B}_1 \ni x \longmapsto \int_{B_1} G(x, y) f(y) dy$$

wohldefiniert ist und

$$g \in C^0(\bar{B}_1), \quad g|_{B_1} \in C^2(B_1), \quad \Delta(g|_{B_1}) = f, \quad g|_{\partial B_1} = 0.$$

### 3 Elektro- und Magnetostatik

#### 3.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwellschen Feldgleichungen für makroskopische Medien bestehen aus den Gesetzen von

- Coulomb

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (3.1)$$

- Ampère-Maxwell

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + j, \quad (3.2)$$

- Faraday

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.3)$$

- und dem Gesetz von der Divergenzfreiheit des  $B$ -Feldes

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (3.4)$$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit einer endlichen Anzahl von Zusammenhangskomponenten und einem Rand  $\partial\Omega$  der Klasse  $C^1$ . Ferner sei  $S \subset \partial\Omega$  eine zweidimensionale kompakte,  $C^1$ -berandete Untermannigfaltigkeit. Dann lassen sich die Maxwell-Gleichungen auch in integraler Form angeben:

- Coulomb

$$\int_{\partial\Omega} (D, \nu) d\omega = Q, \quad (3.5)$$

- Ampère-Maxwell

$$\int_{\partial S} (H, \tau) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (D, \nu) d\omega + I, \quad (3.6)$$

- Faraday

$$\int_{\partial S} (E, \tau) ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (B, \nu) d\omega, \quad (3.7)$$

- Gesetz von der Divergenzfreiheit des  $B$ -Feldes

$$\int_{\partial\Omega} (B, \nu) d\omega = 0. \quad (3.8)$$

### *Sprungrelationen*

Mit Hilfe der Coulomb-Gleichung bzw. Ampère-Maxwell (jeweils im Gauß-Einheitensystem) folgt

$$((D_2 - D_1), \nu) = 4\pi\sigma \quad (3.9)$$

und

$$\nu \times (H_2 - H_1) = \frac{4\pi}{c} K, \quad (3.10)$$

wobei eine Oberflächenstromdichte  $K$  vorausgesetzt wurde.

Nach der Divergenzfreiheit des  $B$ -Feldes ergibt sich

$$((B_2 - B_1), \nu) = 0 \quad (3.11)$$

und nach dem Faradayschen Gesetz

$$\nu \times (E_2 - E_1) = 0. \quad (3.12)$$

### *Das Vektorpotential*

Wegen der Divergenzfreiheit des  $B$ -Feldes, existiert ein Vektorpotential  $A$  mit

$$B = \text{rot } A. \quad (3.13)$$

Demnach können wir das Gesetz von Faraday (3.3) folgendermaßen schreiben:

$$\text{rot} \left( E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.14)$$

und es existiert folglich ein skalares Potential  $\phi$ , so dass

$$E = -\text{grad } \phi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass

$$D = \epsilon E$$

und

$$B = \mu H$$

mit Konstanten  $\epsilon, \mu \in \mathbb{R}$  gelte. Die Gesetze von Coulomb (3.1) und Ampère-Maxwell (3.2) lassen sich nun umformulieren zu

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.16)$$

und, mit

$$\mu^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \mu^{-1} (-\Delta A + \operatorname{grad} \operatorname{div} A) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial A}{\partial t}) + j,$$

zu

$$\mu^{-1} \Delta A - \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \operatorname{grad} (\mu^{-1} \operatorname{div} A + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -j. \quad (3.17)$$

Schreiben wir statt unseres Vektorpotentials, das wir nun als  $A_0$  bezeichnen,

$$A := A_0 + \operatorname{grad} \Lambda, \quad (3.18)$$

so bleibt  $B$  in Gleichung (3.13) unverändert. Statt (3.15) erhalten wir nun

$$E = -\operatorname{grad} (\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}) - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Das skalare Potential transformieren wir gemäß

$$\phi := \phi_0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Die Gleichungen (3.18) und (3.20) heißen Eichtransformationen. Wählen wir

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (3.21)$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \operatorname{div} A + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \mu^{-1} (\operatorname{div} A_0 + \Delta \Lambda) + \epsilon \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right) \\ &= \mu^{-1} \operatorname{div} A_0 + \epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.22)$$



so dass die *Lorentzbedingung*

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.23)$$

unter der Eichtransformation (3.18) und (3.20) unter der Bedingung (3.21) erhalten bleibt. Diese Eichtransformation mit Bedingung (3.21) wird als *Lorentz-Eichung* bezeichnet.

Unter der Lorentzbedingung (3.23) entkoppeln die beiden inhomogenen Gleichungen (3.16) und (3.17) und ergeben die inhomogenen Wellengleichungen

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.24)$$

und

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = -j. \quad (3.25)$$

Wir können statt  $B = \operatorname{rot} A$  natürlich auch  $H = \operatorname{rot} A$  setzen und als Lorentzbedingung

$$\operatorname{div} A + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.26)$$

verwenden.

### *Der Hertzsche Vektor*

Hier definieren wir  $A$  als Vektorpotential mittels

$$H = \operatorname{rot} A.$$

Der Hertzsche Vektor  $\Pi$  ist dann durch

$$A = \epsilon \frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad (3.27)$$

erklärt. Somit gilt gemäß die Lorentzbedingung (3.26)

$$\operatorname{div} A = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \Pi \quad (3.28)$$

und, wenn wir die Integrationskonstante gleich Null wählen,

$$\phi = -\operatorname{div} \Pi. \quad (3.29)$$

Folglich erhalten wir

$$H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \Pi \quad (3.30)$$

und

$$E = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi. \quad (3.31)$$

Im ladungs- und stromfreien Fall genügt  $\Pi$  der homogenen Wellengleichung

$$\Delta \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.32)$$

Da  $\rho = 0$  ist, gilt auch  $\text{div } E = 0$ . Demnach existiert ein Vektorpotential  $A_m$ , so dass

$$E = -\text{rot } A_m.$$

Mit dem durch

$$A_m = \mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \quad (3.33)$$

erklärten Hertzschen Vektors  $\Pi_m$  schreiben wir nun

$$E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_m \quad (3.34)$$

und

$$H = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi_m. \quad (3.35)$$

### *Energiedichte und Energiestrom*

Mit Hilfe des Ampère-Maxwell-Gesetzes (3.2) erhalten wir

$$\int_{\Omega} (j, E) d^3x = \int_{\Omega} ((E, \text{rot } H) - (E, \frac{\partial D}{\partial t})) d^3x. \quad (3.36)$$

Demnach gilt, gemäß

$$\text{div } (E \times H) = (H, \text{rot } E) - (E, \text{rot } H)$$

und dem Gesetz von Faraday (3.3),

$$\int_{\Omega} (j, E) d^3x = - \int_{\Omega} (\text{div } (E \times H) + (E, \frac{\partial D}{\partial t}) + (H, \frac{\partial B}{\partial t})) d^3x. \quad (3.37)$$

Nehmen wir an, dass das Medium lineare elektrische und magnetische Eigenschaften besitzt und sich die Gesamtenergiedichte  $u$  durch

$$u = \frac{1}{2}((E, D) + (B, H)) \quad (3.38)$$

ausdrücken lässt, dann folgt aus (3.37)

$$-\int_{\Omega} (j, E) d^3x = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} (E \times H) \right) d^3x. \quad (3.39)$$

Mit dem Poynting-Vektor  $S$ , definiert durch

$$S := E \times H \quad (3.40)$$

erhalten wir den Energieerhaltungssatz als Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} S = -(j, E). \quad (3.41)$$

### Beispiel

Eine ebene, ungedämpfte elektromagnetische Welle hat die Energiedichte

$$u = \frac{1}{2}(ED + HB) = \epsilon E^2 = \mu H^2$$

und die Energiestromdichte

$$|S| = EH = cu.$$

Die Intensität  $I$  ist der Zeitmittelwert von  $S$ , d. h.

$$I = c\bar{u} = c\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2}c\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}c\mu H_0^2.$$

## 3.2 Elektrostatik

Hier setzen wir das Gaußsche Einheitensystem voraus und fassen einige Resultate aus [3], Kapitel 2-4 kurz zusammen.

### 3.2.1 Greensche Funktion für ein System aus einer Punktladung und einer leitfähigen Kugeloberfläche

Sei  $\Omega = B_a(0)$ . In  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  befinde sich als einzige Ladung eine punktförmige Einheitsladung. Ferner sei  $\gamma = \angle(x, x')$ . Wir suchen eine Greensche Funktion  $G = G_D$  folgenden Dirichlet-schen Randwertproblems für den Laplace-Operator:

$$\Delta \phi = -4\pi \rho \quad \text{in } \Omega$$

$$\phi \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{|x - x'|} - \frac{a}{|x'| |x - \frac{a^2}{x'^2} x'|} \\ &= \frac{1}{(|x|^2 + |x'|^2 - 2|x||x'| \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(\frac{|x|^2 |x'|^2}{a^2} + a^2 - 2|x||x'| \cos \gamma\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Ist  $G = G_D$  eine Greensche Funktion mit

$$G(x, x') = 0 \quad \text{für } x' \in \partial\Omega,$$

dann genügt die Lösung unseres Problems  $\phi$  der Gleichung

$$\phi(x) = \int_{\Omega} \rho(x') G(x, x') dx' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \phi(x') \partial_{\nu'} G(x, x') d\omega_{x'}. \quad (3.42)$$

Da

$$\frac{\partial G(x, x')}{\partial \nu'} \Big|_{|x'|=a} = - \frac{(|x|^2 - a^2)}{a(|x|^2 + a^2 - 2a|x| \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , ergibt sich dann für den zweiten Summanden unserer Integraldarstellung

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \phi(a, \vartheta', \varphi') \frac{a(|x|^2 - a^2)}{(|x|^2 + a^2 - 2a|x| \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} d\omega'. \quad (3.43)$$

Hierbei gilt

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

### 3.2.2 Potentiale für Randwerte auf einer leitfähigen Kugeloberfläche

Wir gehen von einer Kugel mit isolierendem Ring bei  $z = 0$  und einem Potential von  $+V$  auf der oberen und  $-V$  auf der unteren Halbkugel aus. Nach (3.43) ergibt sich

$$\phi(|x|, \vartheta, \varphi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left( \int_0^1 d(\cos \vartheta') - \int_{-1}^0 d(\cos \vartheta') \right) \frac{a(|x|^2 - a^2)}{(|x|^2 + a^2 - 2a|x| \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

falls die Ladungsdichte  $\rho$  in  $\Omega$  verschwindet. Mittels der Variablensubstitution

$$\vartheta' \rightarrow \pi - \vartheta', \quad \varphi' \rightarrow \varphi' + \pi$$

folgt

$$\begin{aligned} \phi(|x|, \vartheta, \varphi) &= \frac{Va(|x|^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \vartheta') ((a^2 + |x|^2 - 2a|x| \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (a^2 + |x|^2 + 2a|x| \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{Va(|x|^2 - a^2)}{4\pi(|x|^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \vartheta') ((1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha := \frac{a|x|}{a^2 + |x|^2}.$$

Nach einer Entwicklung in Taylor-Reihen lässt sich  $\phi$  folgendermaßen schreiben:

$$\phi(|x|, \vartheta, \varphi) = \frac{3Va^2}{2|x|^2} \left( \cos \vartheta - \frac{7a^2}{12|x|^2} \left( \frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) + \dots \right). \quad (3.44)$$

### 3.2.3 Potentiale für Randwerte auf einem Quader

Wir suchen eine Lösung der Laplace-Gleichung der Form

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

für das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\},$$

die den Randbedingungen

$$\phi(x, y, c) = V(x, y)$$

und

$$\phi = 0 \quad \text{auf den anderen fünf Quaderflächen}$$

genügt.

Da

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

für beliebige  $(x, y, z) \in \Omega$  gelten soll, müssen Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2,$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2,$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2,$$

mit

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2,$$

gilt. Daher existiert eine Lösung der Laplace-Gleichung mit

$$\phi(x, y, z) = \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z).$$

Damit  $\phi = 0$  auf  $x = a$  und  $x = b$  ist, muss

$$\alpha a = n\pi \quad \text{und} \quad \beta b = m\pi$$

gelten. Mit den Definitionen

$$\alpha_n := \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m := \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma_{nm} := \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

formulieren wir eine Lösung, als Linearkombination, in der Form

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z).$$

Damit lässt sich auch die noch verbliebene Randbedingung  $\phi(x, y, c) = V(x, y)$  erfüllen. Da es sich bei der entsprechenden Gleichung um die Fourier-Reihe für  $V(x, y)$  handelt, lässt sich

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \quad (3.45)$$

schreiben.

### 3.2.4 Felder in Ecken und auf Kanten

Wir gehen von Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aus. Mit Polarkoordinaten lässt sich die Laplace-Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Verwenden wir den Separationsansatz

$$\phi(\rho, \varphi) = R(\rho)\psi(\varphi),$$

so ergibt sich

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = 0$$

und demnach

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \nu^2 = -\frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2},$$

mit einer Konstanten  $\nu \in \mathbb{R}$ . Folglich lässt sich die allgemeine Lösung in der Form

$$\phi(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\varphi + \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\varphi + \beta_n) \quad (3.46)$$

schreiben. Nehmen wir nun an, dass

$$0 \leq \varphi \leq \beta$$

zu einem festen Wert  $\beta \in \mathbb{R}$ . Weiterhin sei

$$\phi(\rho, \varphi) = V \quad \text{für alle } \rho \geq 0 \text{ mit } \varphi = 0 \vee \varphi = \beta,$$

wobei  $V$  eine reelle Konstante ist. Dann gilt

$$n = m \frac{\pi}{\beta}, \quad m \in \mathbb{N}$$

und

$$\phi(\rho, \varphi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m \frac{\pi}{\beta}} \sin\left(m \frac{\pi}{\beta} \varphi\right). \quad (3.47)$$

In einer Umgebung von  $\rho = 0$  gilt

$$\phi(\rho, \varphi) \approx V + a_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right),$$

für Randbedingungen, die  $a_1 \neq 0$  implizieren. Dann gilt

$$E_\rho(\rho, \varphi) = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \approx -a_1 \frac{\pi}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right)$$

$$E_\varphi(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \approx -a_1 \frac{\pi}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right).$$

### 3.2.5 Randwertprobleme mit azimuthaler Symmetrie

Die Laplace-Gleichung kann mittels Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$  folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.48)$$

Wir nehmen nun an, dass der Produktansatz

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} U(r) P(\vartheta) Q(\varphi)$$

für unsere Probleme sinnvoll ist. Dann folgt

$$r^2 \sin^2 \vartheta \left( \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) \right) + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0.$$

Da

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2,$$

gilt

$$Q(\varphi) = c_1 e^{im\varphi} + c_2 e^{-im\varphi},$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Weiterhin erhalten wir

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) P = 0$$

und

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0,$$

wobei  $l \in \mathbb{N}_0$ . Nach der letzten Gleichung folgt

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}. \quad (3.49)$$

Da wir nun azimuthale Symmetrie voraussetzen, gilt  $m = 0$  und wir erhalten

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta). \quad (3.50)$$

Nehmen wir an, dass  $V(\vartheta)$  auf einer Kugel mit Radius  $a$  vorgegeben und das Potential innerhalb der Kugel gesucht ist. Falls sich keine Ladung im Ursprung befinden, muss das Potential dort



endlich und daher  $B_l = 0$ , mit  $l \in \mathbb{N}_0$ , sein. Um die Koeffizienten  $A_l$  zu bestimmen, betrachten wir

$$V(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \vartheta). \quad (3.51)$$

Demnach folgt

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\vartheta) P_l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (3.52)$$

Mit Hilfe der Legendre-Polynome lässt sich auch das Potential einer Einheits-Punktladung darstellen:

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (3.53)$$

wobei  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) die kleinere (größere) Quantität von  $\{|x|, |x'|\}$  und  $\gamma = \angle(x, x')$ . Dieses Resultat lässt sich mit Hilfe der Entwicklung

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta), \quad x \neq x', \quad (3.54)$$

zeigen.

### 3.2.6 Felder in kegelförmigen Ecken

Wir nehmen an, dass sich das Gebiet durch eine kegelförmige leitende Obefläche berandet wird, wobei

$$0 \leq \vartheta \leq \beta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

sei. In einer Umgebung des Ursprungs lässt sich

$$\phi(r, \vartheta) \approx Ar^{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta),$$

schreiben. Dabei ist  $\nu$  der kleinste Wert mit

$$P_{\nu}(\cos \beta) = 0.$$

Demnach gilt

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \approx -\nu Ar^{\nu-1} P_{\nu}(\cos \vartheta)$$

und

$$E_{\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \approx Ar^{\nu-1} \sin \vartheta P'_{\nu}(\cos \vartheta).$$

### 3.2.7 Randwertprobleme mit Zylindersymmetrie

Die Laplace-Gleichung lässt sich mit Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  in der Form

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.55)$$

schreiben. Lässt sich das Potential durch Produktterme mittels

$$\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

ausdrücken, so folgt

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0,$$

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 Q = 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0.$$

Wir gehen nun davon aus, dass das Potential eines Zylinder mit Radius  $a$  und Höhe  $L$  auf der Mantelfläche und bei  $z = 0$  verschwindet, während

$$\phi(\rho, \varphi, z = L) = V(\rho, \varphi), \quad \text{mit } 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

sei. Dann erhalten wir Lösungen mittels

$$Q(\varphi) = A \sin(m\varphi) + B \cos(m\varphi),$$

$$Z(z) = \sinh(\xi z),$$

xi

$$R(\rho) = C J_m(\xi \rho) + D N_m(\xi \rho),$$

mit Bessel-Funktionen  $J_m$  und Neumann-Funktionen  $N_m$ . Das Potential wird als endlich bei  $\rho = 0$  vorausgesetzt. Demnach gilt  $D = 0$ . Da das Potential bei  $\rho = a$  verschwinden soll, gilt

$$\xi = \xi_{mn} := \frac{x_{mn}}{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei die Größen  $x_{mn}$  die Nullstellen von  $J_m$  sind. Insgesamt ergibt sich

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\xi_{mn} \rho) \sinh(\xi_{mn} z) (A_{mn} \sin(m\varphi) + B_{mn} \cos(m\varphi)). \quad (3.56)$$

Mit dem Randwert

$$\phi(\rho, \varphi, z = L) = V(\rho, \varphi)$$

lassen sich die Koeffizienten  $A_{mn}$  und  $B_{mn}$  bestimmen. Es gilt

$$A_{mn} = \frac{2\operatorname{cosech}(\xi_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\xi_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \varphi) J_m(l_{mn}\rho) \sin(m\varphi), \quad (3.57)$$

$$B_{mn} = \frac{2\operatorname{cosech}(\xi_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\xi_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \varphi) J_m(l_{mn}\rho) \cos(m\varphi). \quad (3.58)$$

### 3.2.8 Entwicklung von Greenschen Funktionen in Kugelflächenfunktionen

Um das Dirichlet-Randwertproblem des Abschnitts 3.2.1 zu behandeln, lässt sich die Entwicklung

$$\frac{1}{|x - x'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (3.59)$$

nutzen. So ergibt sich

$$G(x, x') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left( \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.60)$$

Entsprechend gilt für eine Kugelschale mit verschwindenden Randwerten bei  $r = a$  und  $r = b > a$ :

$$G(x, x') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{(2l+1)(1 - (\frac{a}{b})^{2l+1})} \left( r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right). \quad (3.61)$$

Mit

$$\phi(x) = \int_{\Omega} \rho(x') G(x, x') dx' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \phi(x') \frac{\partial G}{\partial \nu'} d\omega' \quad (3.62)$$

steht uns eine allgemeine Darstellung zur Verfügung. Ist  $a = 0$ , so gilt für die Normalableitung bei  $r' = b$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu'} = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l,m} \left( \frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Lautet die Randwertbedingung

$$\phi(r = b, \vartheta, \varphi) = V(\vartheta, \varphi),$$

so ergibt sich für das Oberflächenintegral

$$\phi(x) = \sum_{l,m} \left( \int_{\partial\Omega} V(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') d\omega' \right) \left( \frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

### 3.2.9 Entwicklung von Greenschen Funktionen mittels modifizierter Besselfunktionen

Die modifizierte Besselfunktionen  $I_\nu$ ,  $K_\nu$  sind Lösungen der Differentialgleichung

$$x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)x(t) = 0, \quad (3.63)$$

wobei  $\nu \in \mathbb{R}_+$ . Diese sind durch

$$I_\nu(t) := i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad (3.64)$$

$$K_\nu(t) := \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu(ix), \quad (3.65)$$

mit Hilfe der Bessel-Funktionen  $J_\nu$  bzw. Hankel-Funktionen erster Art  $H_\nu^{(1)}$ , erklärt. Wir gehen von dem Problem

$$\nabla G = -\frac{4\pi}{\rho} \delta \quad (3.66)$$

aus, wobei Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  verwendet werden. Es lässt sich zeigen, dass

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\xi, e^{im(\varphi-\varphi')} \cos(\xi(z-z')) g_m(\xi, \rho, \rho'), \quad (3.67)$$

wobei  $g_m(\xi, \rho, \cdot)$  der Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dg_m}{d\rho} \right) - \left( k^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta_\rho \quad (3.68)$$

genügt.

### 3.2.10 Multipol-Entwicklung

Sei  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\text{supp } \rho \subset \subset B_R(0)$ . Dann lässt sich das Potential in  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$  durch die Reihe

$$\phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad (3.69)$$

darstellen, was mittels

$$\phi(x) = \int_{B_R(0)} \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx' \quad (3.70)$$

und Gleichung (3.59) folgt. Da wir Werte von  $x$  außerhalb der Ladungsverteilung betrachten, gilt  $r_{<} = r'$  und  $r_{>} = r$ . Die Größen  $q_{lm}$  sind durch

$$q_{lm} := \int_{B_R(0)} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \rho(x') dx' \quad (3.71)$$

erklärt und werden als *Multipolmomente* bezeichnet. Da

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \phi),$$

gilt

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (3.72)$$

Das *elektrische Dipolmoment*  $p$  wird durch

$$p := \int_{\Omega} x' \rho(x') dx' \quad (3.73)$$

und das *Quadrupolmoment*  $Q$  durch

$$Q_{ij} := \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(x') dx' \quad (3.74)$$

erklärt. Dabei wird allgemein ein beschränktes Gebiet  $\Omega$  mit  $\text{supp } \rho \subset \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$  vorausgesetzt. Somit ergibt sich die Entwicklung

$$\phi(x) = \frac{q}{r} + \frac{(p, x)}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i Q_{ij} x_j}{r^5} + \dots \quad (3.75)$$

Für das elektrische Feld können wir in Kugelkoordinaten

$$(E_r, E_\vartheta, E_\varphi) = \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \left( (l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), -\frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), -\frac{im}{\sin \vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (3.76)$$

schreiben. Für Dipol-Felder lässt sich

$$E(x) = \frac{3n(p, n) - p}{|x - x_0|^3}, \quad x \neq x_0 \quad (3.77)$$

herleiten. Dabei bezeichnet  $x_0$  den Ort des Dipols und  $n$  einen Einheitsvektor von  $x_0$  nach  $x$ .

### 3.2.11 Randwertprobleme in Dielektrika

Als dielektrische Polarisation  $P$  wird das Dipolmoment pro Volumen bezeichnet. Da

$$\phi(x) = \int_{\Omega} \frac{\rho(x') - \operatorname{div}' P(x')}{|x - x'|} dx', \quad (3.78)$$

lässt sich die erste Maxwellsche Gleichung in der Form

$$\operatorname{div} E = 4\pi(\rho - \operatorname{div} P), \quad (3.79)$$

und mit der *Verschiebungsdichte*  $D$ , als

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \quad (3.80)$$

schreiben. Dabei wurde

$$D := E + 4\pi P \quad (3.81)$$

gesetzt. Oft wird vorausgesetzt, dass eine, als *dielektrische Suszeptibilität* bezeichnete Konstante  $\chi_e$  existiert, so dass

$$P = \chi_e E \quad (3.82)$$

gilt. Dann folgt

$$D = \epsilon E \quad (3.83)$$

mit der *Dielektrizitätskonstanten*

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e. \quad (3.84)$$

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius  $a$  innerhalb eines homogenen elektrischen Feldes der Stärke  $E_0$ , wobei weder innerhalb noch außerhalb der Kugel Ladungen existieren. Wir schreiben

$$\phi(x) = \phi_i \text{ für } x \in B_a(0) \text{ und } \phi(x) = \phi_a \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_a(0)}.$$

Es gilt

$$\phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta) \quad (3.85)$$

und

$$\phi_a = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \vartheta). \quad (3.86)$$

Weiterhin gilt

$$\left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \vartheta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_a}{\partial \vartheta} \right|_{r=a} \quad (3.87)$$

und

$$-\epsilon \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \right|_{r=a} . \quad (3.88)$$

Demnach ergibt sich

$$\phi_i = \frac{3}{\epsilon + 2} E_0 r \cos \vartheta \quad (3.89)$$

und

$$\phi_a = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \vartheta . \quad (3.90)$$

Innerhalb der Kugel herrscht ein Feld der Stärke

$$E_i = \frac{3}{\epsilon + 2} E_0 ,$$

außerhalb wird dem Felde der Stärke  $E_0$  das eines elektrischen Dipols mit Dipolmoment

$$p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 E_0$$

überlagert.

### 3.3 Magnetostatik

#### 3.3.1 Kräfte im Magnetfeld

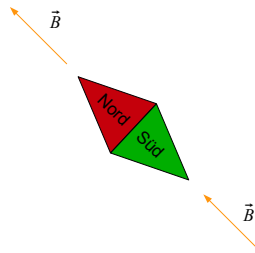
Während im elektrischen Feld auf eine Ladung  $q$  immer eine Kraft wirkt, wirkt im Magnetfeld auf die Ladung nur dann eine Kraft, wenn sich die Ladung bewegt. Diese Kraft wird als *Lorentz-Kraft* bezeichnet. Sie beträgt

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Dabei bezeichnet  $B$  die *magnetische Flussdichte*. Ihre SI-Einheit lautet:

$$1 \frac{N}{Cms^{-1}} = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 T \text{ (Tesla)}$$

Die Feldlinien des  $B$ -Feldes sind geschlossen.



**Abbildung 3.1** Einstellung einer Magnetnadel

Ein Draht der Länge  $l$  mit dem Querschnitt  $A$  enthält  $n l A$  Elektronen. Dabei bezeichnet  $n$  die Teilchenzahldichte. Daher wirkt auf den Draht im Magnetfeld die Kraft

$$\vec{F} = -enlA\vec{v} \times \vec{B}.$$

Da für die Stromdichte

$$\vec{j} = -en\vec{v}$$

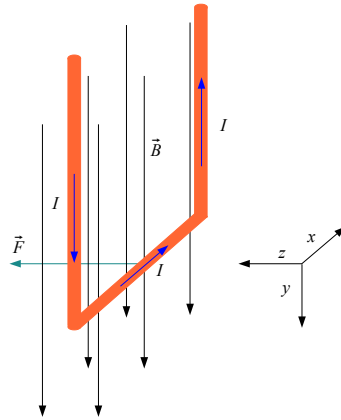
gilt, lässt sich die Kraft auch folgendermaßen schreiben:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}.$$

Dabei kennzeichnet  $l$  neben der Länge des Drahtes auch die technische Stromrichtung.



Die Kraftwirkung auf eine stromdurchflossene Leiterschleife lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:



**Abbildung 3.2** Stromdurchflossene Leiterschleife im Magnetfeld

### 3.3.2 Der Hall-Effekt

Unter der Wirkung der Lorentz-Kraft werden die Ladungsträger senkrecht zur Bewegungsrichtung und dem Magnetfeld abgelenkt. An den Seitenflächen lagern sich entgegengesetzte Ladungen an, deren Feld nach kurzer Zeit die Wirkung der Lorentzkraft aufhebt.

Für die Feldstärke dieses Querfeldes gilt

$$eE_H = -ev \times B.$$

Weiterhin gilt

$$E_H \cdot b = U_H$$

und

$$I = j \cdot A = j \cdot bd = envbd,$$

wobei

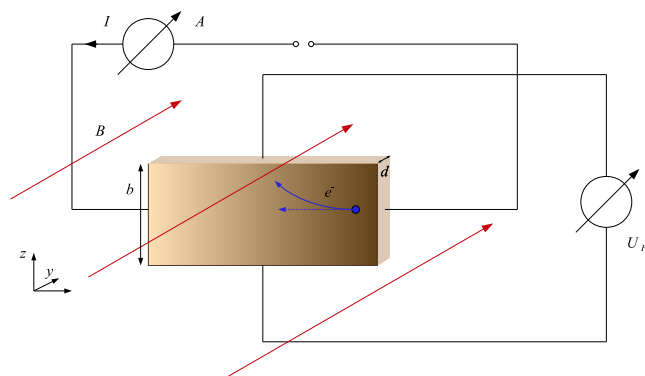
$$n = \frac{N}{V}$$

die Ladungsträgerdichte bezeichnet. Demnach erhalten wir

$$U_H = -bvB = -\frac{1}{en} \frac{IB}{d} = -R_H \frac{IB}{d},$$

wobei

$$R_H := \frac{1}{en}.$$



**Abbildung 3.3** Die Lorentz-Kraft und der Hall-Effekt

### 3.3.3 Das Gesetz von Biot-Savart

Nach dem Gesetz von Biot-Savart

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (3.91)$$

ist das Magnetfeld orthogonal zur Ebene, die von den Vektoren  $d\vec{l}$  und  $\vec{r}$  aufgespannt wird.

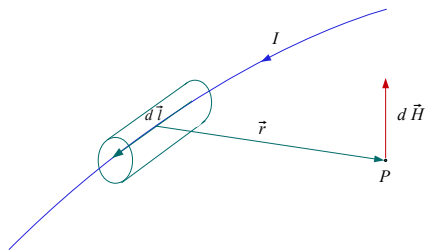


Abbildung 3.4 Magnetfeld im Punkt  $P$

#### Beispiele

##### a) Magnetfeld eines geraden Leiters

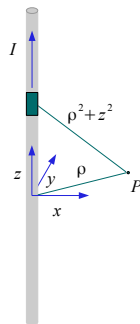


Abbildung 3.5 Magnetfeld im Punkt  $P$

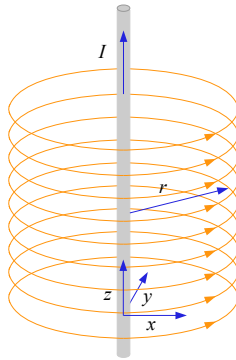
Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  erhalten wir

$$H = H_\varphi e_\varphi$$

und

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{I}{4\pi} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{4\pi} \rho \lim_{L \rightarrow \infty} (\rho + z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{z}{\rho^2} \Big|_{-L}^L \\ &= \rho \frac{I}{4\pi} \frac{2}{a^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{\rho}{L})^2 + 1}} = \frac{I}{4\pi} \rho \frac{2}{\rho^2} = \frac{I}{2\pi \rho} . \end{aligned}$$

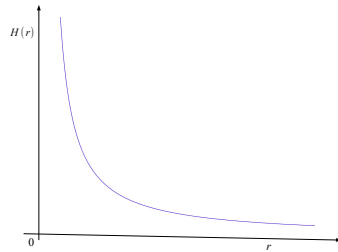
Nun setzen wir  $r := \rho$ .



**Abbildung 3.6** Magnetfeldlinien um einen geraden stromdurchflossenen Leiter

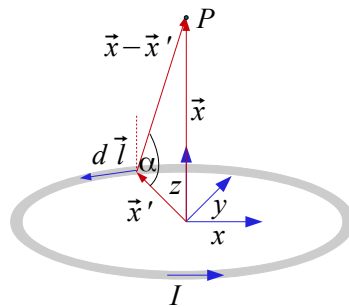
Die Feldstärke eines geraden Leiters beträgt

$$H(r) = \frac{I}{2r\pi}.$$



**Abbildung 3.7** Die radiale Abhängigkeit des  $H$ -Feldes

*b) Magnetfeld eines Kreisstroms*



**Abbildung 3.8** Magnetfeld im Punkt  $P = (0, 0, z)$

Mit

$$r = x - x', \quad dl = dx', \quad \rho := |x'|$$

erhalten wir für einen beliebigen Punkt auf der  $z$ -Achse

$$H_z(z) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{\rho^2 + z^2} dl$$

und mit

$$\cos \alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

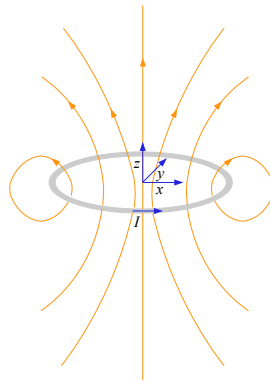
für diese Feldkomponente

$$H_z(z) = \frac{I}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi\rho = \frac{I}{2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir nun wieder  $r$  statt  $\rho$ , so können wir für diese Feldkomponente im Ursprung

$$H_z(0) = \frac{I}{2} \frac{1}{r}$$

schreiben.

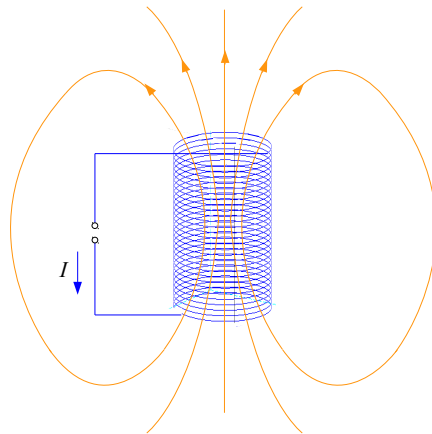


**Abbildung 3.9** Magnetfeldlinien um einen Kreisstrom

Die Feldstärke einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius  $r$  beträgt im Ursprung

$$H(r) = \frac{I}{2r}.$$

c) Feldstärke im Inneren einer langen Zylinderspule



**Abbildung 3.10** Magnetfeldlinien um eine Spule

Die Feldstärke im Inneren einer langen Zylinderspule beträgt

$$H = In, \text{ wobei } n : \text{Anzahl der Drahtwindungen/Meter}$$

wobei

$$n = \frac{N}{l}$$

die Windungsdichte,  $N$  die Windungszahl und  $l$  die Länge der Spule bezeichnet.

Im Vakuum gilt

$$B = \mu_0 H$$

und in linearen, isotropen Medien

$$B = \mu H .$$

Dabei ist

- $\mu = \mu_r \mu_0$ : Permeabilität
- $\mu_r$ : Permeabilitätszahl
- $\mu_0$ : magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante;  $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$

### 3.3.4 Magnetisierung

Die Magnetisierung von Kristallen und Molekülen wird durch mikroskopische Kreisströme verursacht. Diese Kreisströme beeinflussen die Flussdichte  $B$ , jedoch nicht die magnetische Feldstärke  $H$ . In magnetisierbarem Material gilt

$$B = \mu_0(H + J),$$

mit der Magnetisierung  $J$ . Neben  $J$  verwenden wir auch die Bezeichnung  $M$  für die Magnetisierung.

Da die magnetische Suszeptibilität  $\chi$  mittels

$$J = \chi H$$

definiert ist, folgt daher

$$B = \mu_0(1 + \chi)H,$$

Setzen wir ein isotropes Medium voraus, so können wir

$$B = \mu_r \mu_0 H = \mu H$$

schreiben, wobei  $\mu$  hier nicht notwendigerweise konstant ist.

Somit gilt

$$\mu = 1 + \chi.$$

### Diamagnetismus

Materialien, für deren Suszeptibilität  $\chi$

$$\chi < 0 \text{ und } |\chi| \ll 1$$

gilt, werden als *diamagnetisch* bezeichnet. Solche Stoffe erfahren in Magnetfeldern eine abstoßende Wirkung, d. h. eine Kraftwirkung in Richtung abnehmender Feldstärke.

---

Magnetische Suszeptibilität  $\chi$  in  $10^{-6}$

---

Wismut $Bi$	−170
Gold $Au$	−30
Silber $Ag$	−25
Kupfer $Cu$	−10
Quecksilber $Hg$	−19
Wasser $H_2O$	−9
Stickstoff $N_2$	−0,06

---



## Paramagnetismus

Materialien, für deren Suszeptibilität  $\chi$

$$\chi > 0$$

gilt, werden als *paramagnetisch* bezeichnet. Im Gegensatz zu diamagnetischen Stoffen, werden paramagnetische Materialien in Richtung zunehmender Magnetfeldstärke gezogen.

---

Magnetische Suszeptibilität  $\chi$  in  $10^{-6}$

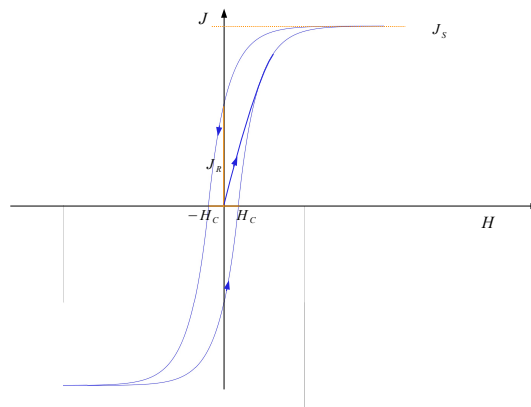
---

Aluminium <i>Al</i>	20
Platin <i>Pt</i>	260
Palladium <i>Pd</i>	690
Mangan <i>Mn</i>	1000
Sauerstoff <i>O<sub>2</sub></i>	1,8
flüssiger Sauerstoff	3600
Luft	0,5

---

## Ferromagnetismus

Bei *ferromagnetischen* Materialien ist die Magnetisierung  $J$  und damit die Suszeptibilität  $\chi$  sehr groß. Außerdem ist  $\chi$  von der Feldstärke  $H$  und der Vorgeschichte des Materials abhängig.



**Abbildung 3.11** Hysterese der Magnetisierung

$J_S$ : Sättigungswert der Magnetisierung

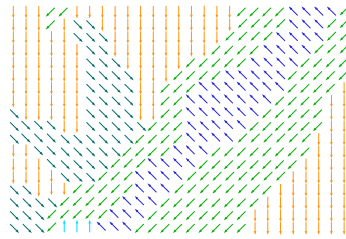
$J_R$ : Remanenz-Magnetisierung

$H_C$ : Koerzitivfeldstärke

Während bei paramagnetischen Materialien die Wärmebewegung die Ordnung der Elementar-Spinmomente über große Temperaturbereiche stark stört, kann die Wärmebewegung bei ferromagnetischen Stoffen die Ordnung dieser magnetischen Momente unterhalb einer bestimmten, relativ hohen Temperatur, der Curie-Temperatur  $T_C$ , nicht in einem solchen Umfang aufheben.

Beispielsweise beträgt die Curie-Temperatur für Eisen  $T_C = 1017 \text{ K}$ .

Durch ein äußeres Magnetfeld bilden sich einheitlich magnetisierte Gebiete, die *Weiss-Bereiche*.



**Abbildung 3.12** Schematische Darstellung der spontanen Magnetisierung

### 3.3.5 Das Vektorpotential

Nun setzen wir wieder das Gaußsche Einheitensystem voraus und gehen auf einige Resultate aus [3], Kapitel 5 ein.

Nach Gleichung (3.91) gilt für eine Stromdichte  $j$

$$B(x) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} j(x') \times \frac{x - x'}{|x - x'|} dx'. \quad (3.92)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B &= \frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \int_{\Omega} \frac{j(x')}{|x - x'|} dx' \\ &= \frac{1}{c} \operatorname{grad} \int_{\Omega} (j(x'), \operatorname{grad} \frac{1}{|x - x'|}) dx' - \frac{1}{c} \int_{\Omega} j(x') \Delta \frac{1}{|x - x'|} dx' \\ &= \frac{1}{c} \operatorname{grad} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div}' j(x')}{|x - x'|} dx' + \frac{4\pi}{c} j(x). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Wir nehmen an, dass  $\operatorname{div} j = 0$  gilt und erhalten

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j. \quad (3.94)$$

Da

$$\operatorname{div} B = 0$$

ist, existiert ein Vektorpotential  $A$ , so dass

$$B = \operatorname{rot} A \quad (3.95)$$

gilt. Wir gehen hier von der Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} A = 0 \quad (3.96)$$

aus. Folglich erhalten wir

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j. \quad (3.97)$$

### 3.3.6 Das Vektorpotential und die Magnetische Flussdichte für einen Kreisstrom

Sei  $a$  der Radius des Kreisleiters. Es gilt

$$\begin{aligned} A_\varphi(r, \vartheta) &= \frac{Ia}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \vartheta \cos \varphi')^{\frac{1}{2}}} d\varphi' \\ &= \frac{4Ia}{c\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \sin \vartheta}} \cdot \frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

mit elliptischen Integralen  $K$  und  $E$  und

$$k^2 := \frac{4ar \sin \vartheta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \vartheta}.$$

Für die Flussdichte  $B$  gilt

$$(B_r, B_\vartheta, B_\varphi) = \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi), -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), 0 \right). \quad (3.99)$$

### 3.3.7 Magnetfelder einer lokalen Stromverteilung

Wir setzen voraus, dass  $j \in C_0^\infty(\Omega)$  eine divergenzfreie Stromverteilung ist. Mit  $|x'| \gg |x|$  erhalten wir

$$A_i(x) = \frac{1}{c|x|} \int_{\Omega} j_i(x') dx' + \frac{1}{c|x|^3} (x, \int_{\Omega} x' j_i(x') dx') + \dots \quad (3.100)$$

Da

$$\int_{\Omega} j_i(x') dx' = 0$$

und

$$(x, \int_{\Omega} x' j_i(x) dx') = -\frac{1}{2} (x \times \int_{\Omega} (x' \times j) dx')_i$$

gilt und das *magnetische Moment* durch

$$m := \int_{\Omega} M(x') dx', \quad (3.101)$$

mit der *Magnetisierung*

$$M(x) := \frac{1}{2c} (x \times j(x)) \quad (3.102)$$

definiert ist, folgt

$$A(x) = \frac{m \times x}{|x|^3} + \dots \quad (3.103)$$

Betrachten wir nur diesen ersten Term, so ergibt sich

$$B(x) = \frac{3n(n, m) - m}{|x|^3}, \quad (3.104)$$

wobei  $n = \frac{x}{|x|}$ . Falls der Strom in einem Stromkreis mit Linienelement  $dl$  verläuft, gilt

$$m = \frac{I}{2c} \oint x \times dl.$$

Da

$$F = \frac{1}{c} \int_{\Omega} j(x) \times B(x) dx \quad (3.105)$$

erhalten wir für die  $i$ -te Komponente der Kraft

$$F_i = \frac{1}{c} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \left( B_k(0) \int_{\Omega} + \int_{\Omega} j_i(x') (x', \text{grad } b_k(0)) dx' + \dots \right), \quad (3.106)$$

mittels einer Taylor-Reihen-Entwicklung. Für die beiden explizit dargestellten Summanden erhalten wir

$$F_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (m \times \nabla)_j B_k(x). \quad (3.107)$$

Mit  $\text{div } B = 0$  erhalten wir

$$F = \text{grad } (m, B). \quad (3.108)$$

### 3.3.8 Randwertprobleme in der Magnetostatik

Mit

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left( \frac{j(x')}{|x - x'|} + \frac{cM(x') \times (x - x')}{|x - x'|^3} \right) dx' \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left( \frac{j(x') + c \text{rot}' M(x')}{|x - x'|} \right) dx' \end{aligned} \quad (3.109)$$

und der *effektiven Stromdichte*

$$j_M := c \text{rot } M \quad (3.110)$$

folgt

$$\text{rot } B = \frac{4\pi}{c} (j + j_M). \quad (3.111)$$

Das magnetische Feld  $H$  wird daher durch

$$H := B - 4\pi M \quad (3.112)$$

erklärt. Demnach gilt

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j. \quad (3.113)$$

Mit den in Abschnitt 3.1 erwähnten Sprungrelationen

$$((B_2 - B_1), \nu) = 0 \quad (3.114)$$

und

$$\nu \times (H_2 - H_1) = \frac{4\pi}{c} K \quad (3.115)$$

ergibt sich, für isotrope Medien,

$$(H_2, \nu) = \frac{\mu_1}{\mu_2} (H_1, \nu), \quad H_2 \times \nu = H_1 \times \nu. \quad (3.116)$$

Verwenden wir

$$B = \text{rot } A$$

und setzen voraus, dass

$$B = \mu H$$

gilt, dann erhalten wir, mit Gleichung (3.113),

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } A \right) = \frac{4\pi}{c} j. \quad (3.117)$$

Ist  $\mu = \text{const.}$ , dann ergibt sich

$$-\Delta A = \frac{4\pi}{c} j, \quad (3.118)$$

falls wir die Coulomb-Eichung, d. h.  $\text{div } A = 0$ , verwenden. Ist  $j = 0$ , dann ist die Verwendung eines skalaren Potentials  $\phi_M$  mit

$$H = -\text{grad } \phi_M \quad (3.119)$$

sinnvoll. Da

$$\text{div } B = \text{div } (H + 4\pi M) = 0,$$

lässt sich

$$\Delta \phi_M = -4\pi \rho_M, \quad (3.120)$$

mit der *effektiven magnetischen Ladungsdichte*

$$\rho_M := -\text{div } M \quad (3.121)$$

schreiben. Falls (beispielsweise)  $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\phi_M = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\operatorname{div}' M(x')}{|x - x'|} dx' = - \operatorname{div} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{M(x')}{|x - x'|} dx'. \quad (3.122)$$

Weiterhin gilt dann für  $x$  weit außerhalb der nichtverschwindenden Magnetisierung

$$\phi_M(x) \approx \frac{(m, x)}{r^3}. \quad (3.123)$$

Mit der *effektiven magnetischen Oberflächenladungsdichte*

$$\sigma_M := (\nu, M) \quad (3.124)$$

ergibt sich

$$\phi_M = - \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div}' M(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma_M(x')}{|x - x'|} d\omega_{x'}. \quad (3.125)$$

Wir setzen wieder  $j = 0$  voraus. Mit

$$B = \operatorname{rot} A$$

und der effektiven Stromdichte nach (3.110) erhalten wir

$$\Delta A = - \frac{4\pi}{c} j_M. \quad (3.126)$$

Folglich gilt

$$A(x) = \int_{\Omega} \frac{\operatorname{rot}' M(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{M(x') \times \nu(x')}{|x - x'|} d\omega_{x'}. \quad (3.127)$$

### 3.3.9 Homogen magnetisierte Kugel

Wir betrachten eine homogen magnetisierte Kugel mit Radius  $a$  und

$$M = M_0(0, 0, 1),$$

mit einer Konstanten  $M_0 \in \mathbb{R}$ . Da

$$\sigma_M = (\nu, M) = M_0 \cos \vartheta$$

erhalten wir, nach (3.125),

$$\phi_M(r, \vartheta) = M_0 a^2 \int B_1(0) \frac{\cos \vartheta'}{|x - x'|} d\omega_{x'} = \frac{4\pi}{3} M_0 a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \vartheta, \quad (3.128)$$

wobei  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) die kleinere (größere) Zahl von  $\{r, a\}$  ist. Innerhalb der Kugel gilt demnach

$$\phi_M = \frac{4\pi}{3} M_0 z \quad (3.129)$$

und

$$H_i = -\frac{4\pi}{3} M, \quad B_i = \frac{8\pi}{3} M. \quad (3.130)$$

Außerhalb der Kugel gilt

$$\phi_M = \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \frac{\cos \vartheta}{r^2}. \quad (3.131)$$

Folglich entspricht das Potential außerhalb der Kugel einem Dipol mit Dipolmoment

$$m = \frac{4\pi a^3}{3} M. \quad (3.132)$$

Betrachten wir zusätzlich ein externes Feld mit  $B_0 = H_0$ , so gilt

$$H_i = B_0 - \frac{4\pi}{3} M, \quad B_i = B_0 + \frac{8\pi}{3} M. \quad (3.133)$$

Gilt

$$B_i = \mu H_i,$$

mit einem konstanten  $\mu$ , so können wir  $M$  als affin-lineare Funktion von  $B_0$  darstellen, da aus

$$B_0 + \frac{8\pi}{3} M = \mu(B_0 - \frac{4\pi}{3} M)$$

die Gleichung

$$M = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \right) B_0 \quad (3.134)$$

folgt. Für ferromagnetische Materialien gilt diese Eigenschaft allerdings nicht.



### 3.3.10 Magnetische Abschirmung

Wir nehmen an, dass sich eine magnetisch permeable Hohlkugel mit Innenradius  $a$  und Außenradius  $b$  in einem homogenen Feld mit Flussdichte  $B_0$  befindet. Ferner sei  $B = \mu H$  mit einer Konstanten  $\mu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

- falls  $r > b$

$$\phi_m = -B_0 r \cos \vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta), \quad (3.135)$$

- falls  $a < r < b$

$$\phi_m = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \beta_l r^l + \frac{\gamma_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \vartheta) \quad (3.136)$$

- falls  $r < a$

$$\phi_m = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos \vartheta). \quad (3.137)$$

Die Feldkomponenten  $H_\vartheta$  und  $B_r$  sind in  $r = a$  und  $r = b$  stetig. Das impliziert, dass

$$\frac{\partial \phi_M}{\partial \vartheta}(b_+) = \frac{\partial \phi_M}{\partial \vartheta}(b_-), \quad \frac{\partial \phi_M}{\partial \vartheta}(a_+) = \frac{\partial \phi_M}{\partial \vartheta}(a_-), \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial \phi_M}{\partial r}(b_+) = \mu \frac{\partial \phi_M}{\partial r}(b_-), \quad \mu \frac{\partial \phi_M}{\partial r}(a_+) = \frac{\partial \phi_M}{\partial r}(a_-). \quad (3.139)$$

Alle Koeffizienten mit  $l \neq 0$  verschwinden. Weiterhin folgt für die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\delta_1$ :

$$\alpha_1 = \frac{(2\mu + 1)(\mu - 1)}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - 1)^2} (b^3 - a^3) B_0 \quad (3.140)$$

und

$$\delta_1 = \frac{9\mu}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu - 1)^2} B_0. \quad (3.141)$$

### 3.4 Randwert- und Anfangswertprobleme

Setzen wir  $\rho = 0$ ,  $j = 0$ ,  $\epsilon = 1$  und  $\mu = 1$  voraus, so nehmen die Maxwell'schen Gleichungen folgende Form an:

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x, t) = \operatorname{rot} H(x, t), \quad (3.142)$$

$$\operatorname{div} E(x, t) = 0, \quad (3.143)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = -\operatorname{rot} E(x, t), \quad (3.144)$$

$$\operatorname{div} H(x, t) = 0. \quad (3.145)$$

**Definition 3.1** Sei  $(E_0, H_0) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$ . Wir bezeichnen

$$(E, H) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3), C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3))$$

als (klassische) Lösung des Cauchyproblems für die Maxwell-Gleichungen im  $\mathbb{R}^3$ , wenn  $(E, H)$  die Gleichungen (3.142 - 3.145) erfüllt und den Anfangsbedingungen

$$E(x, 0) = E_0(x) \text{ und } H(x, 0) = H_0(x) \quad (3.146)$$

genügt.

**Satz 3.2** Genügt  $(E, H)$  den Voraussetzungen der Definition 3.1 und gilt

$$\operatorname{div} E_0(x) = \operatorname{div} H_0(x) = 0, \quad (3.147)$$

dann gibt es genau eine Lösung  $(E, H)(x, t)$  des Cauchyproblems für die Maxwell-Gleichungen und es gilt

$$E(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \operatorname{rot} H_0(y) dy + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{|y-x|=t} E_0(y) dy \right) \quad (3.148)$$

und

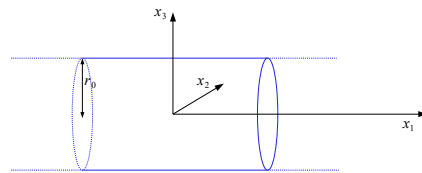
$$H(x, t) = -\frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \operatorname{rot} E_0(y) dy + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{|y-x|=t} H_0(y) dy \right). \quad (3.149)$$

### Randwertprobleme für einen kreiszylindrischen Hohlleiter

Wir betrachten in Richtung der Zylinderachse  $x_1 = z$  fortschreitende Wellen von  $\Pi$ , so dass für den Hertzschen Vektor  $\Pi = (\Pi_1, 0, 0)$  gesetzt wird. Außerdem gehen wir davon aus, dass sich die  $x_1$ -Komponente des Hertzschen Vektors in Form einer ebenen Welle darstellen lässt mit

$$\Pi_1 = \Pi_1(x_2, x_3)e^{i(\omega t - k_1 x_1)}, \quad (3.150)$$

wobei  $k_1 = 2\pi\lambda_h^{-1}$  mit der Hohlleiterwellenlänge  $\lambda_h$ . Dieser Ansatz ist hier im Sinne einer Näherung zu verstehen.



**Abbildung 3.13** Ein kreiszylindrischer Hohlleiter

Die Komponente  $\Pi_1$  des Hertzschen Vektors genügt der Helmholtzschen Schwingungsgleichung

$$\Delta \Pi_1 + k^2 \Pi_1 = 0. \quad (3.151)$$

Weiterhin erhalten wir

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + s^2 \right) \Pi_1(r, \varphi) = 0, \quad (3.152)$$

mit

$$s^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2.$$

Wir schreiben

$$\Pi_1(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$$

Wie in der Lösung zum Cauchy-Problem für eine kreisförmige Membran, existieren  $m \in \mathbb{Z}$ , so dass

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Pi_1. \quad (3.153)$$

Demnach genügt  $f$  der Besselschen Differentialgleichung

$$r^2 f'' + r f' + (s^2 r^2 - m^2) f = 0 \quad (3.154)$$

und es gilt  $f = J_m(sr)$ . Somit erhalten wir mittels

$$\Pi_1(\varphi, r, x_1, t) = A J_m(sr) \cos(m\varphi) e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \quad (3.155)$$

eine Lösung. In Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  werden Gradient, Divergenz und Rotation folgendermaßen dargestellt:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z,$$

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

und

$$\text{rot } A = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) e_z.$$

Demnach gilt

$$\text{grad div } \Pi = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r \partial z} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi \partial z} e_\varphi + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2} e_z \quad (3.156)$$

und

$$\text{rot } \Pi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi} e_r - \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} e_\varphi. \quad (3.157)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3.30) und (3.31) erhalten wir somit

$$H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi \quad (3.158)$$

$$= -i\omega\epsilon A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left( m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_r + s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_\varphi \right)$$

und

$$E = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi \quad (3.159)$$

$$= s^2 \Pi_1 e_z - i k_1 A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left( s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_r - m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_\varphi \right).$$

Da  $H_1 = 0$  und damit das Magnetfeld transversal zu  $x_1$  ist, nennen wir diese Lösungen *TM-Wellen*, wenn diese zusätzlich der Randbedingung (3.162) genügen.

Entsprechend implizieren die Gleichungen (3.34) und (3.35)

$$E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_m \quad (3.160)$$

$$= i\omega\mu A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left( m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_r + s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_\varphi \right)$$

und

$$H = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi_m \quad (3.161)$$

$$= s^2 \Pi_1 e_z - i k_1 A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left( s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_r - m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_\varphi \right).$$

Da  $E_1 = 0$  und damit das elektrische Feld transversal zu  $x_1$  ist, nennen wir diese Lösungen *TE-Wellen*, wenn diese zusätzlich der Randbedingung (3.162) genügen.

Da für die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke  $E_t$  die Randbedingung

$$E_t|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.162)$$

gilt, folgt für *TM-Wellen*

$$E_1 = 0, \quad E_\varphi = 0 \quad \text{für } r = r_0$$

und für *TE-Wellen*

$$E_\varphi = 0 \quad \text{für } r = r_0.$$

Das impliziert, dass bei

- TM-Wellen

$$sr_0 = \kappa_{ml},$$

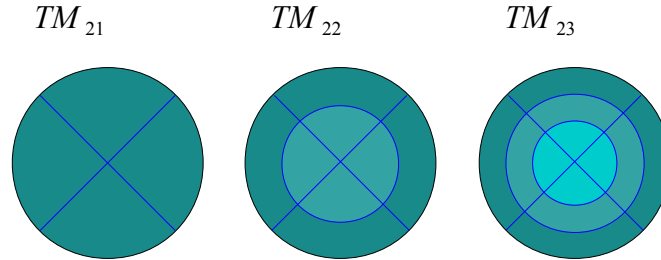
wobei  $\kappa_{ml}$  die Nullstellen der Besselfunktion erster Art und  $m$ -ter Ordnung  $J_m$  sind,

- TE-Wellen

$$sr_0 = \tilde{\kappa}_{ml},$$

wobei  $\tilde{\kappa}_{ml}$  die Nullstellen von  $J'_m$  sind.

Damit können Knotenzylinder des Hohlleiterquerschnitts anhand der Nullstellen von  $J_m$  und Knotenflächen mittels der Nullstellen von  $\cos(m\varphi)$  dargestellt werden:

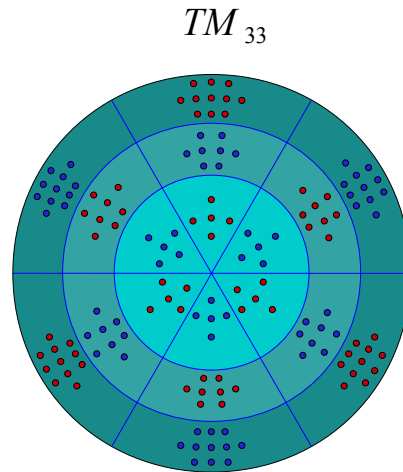


**Abbildung 3.14** Knotenflächen für  $TM_{2l}$ ,  $l = 1, 2, 3$

Bei TM-Wellen lautet hier die elektrische Feldstärke in Axialrichtung

$$E_1 = As^2 J_m(sr) \cos(m\varphi) e^{i(\omega t - k_1 x_1)}.$$

Für  $m = 3$  und  $l = 3$  lässt sich diese im Querschnitt des Hohlleiters zu einem festen Zeitpunkt folgendermaßen abbilden:



**Abbildung 3.15** Richtung von  $E_1$  und Knotenflächen für  $TM_{33}$

Im Rahmen von elektro- oder magnetostatischen Problemen tritt beispielsweise folgendes Randwertproblem auf:

**Definition 3.3** Dirichlet-Problem  $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet, das aus endlich vielen disjunkten, jeweils zusammenhängenden,  $C^\infty$ -berandeten Gebieten besteht. Die Anzahl beschränkter Zusammenhangskomponenten von  $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  beträgt  $m$ . Ferner sei  $E_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $0 < \alpha < 1$  und  $h \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ,  $\gamma \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  und

$$(\nu, \gamma) = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Gesucht ist ein  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  mit

$$\operatorname{div} f = h, \quad (3.163)$$

$$\operatorname{rot} f = g, \quad (3.164)$$

$$-\nu \times f = \gamma \text{ auf } \partial\Omega, \quad (3.165)$$

$$-\int_{\partial\Omega} (\nu, f) \hat{h}^i|_{\partial\Omega} d\omega = E^i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.166)$$

Eine ausführliche Behandlung dieses Problems findet man in [4] und [7]. Diese Randwertaufgabe steht außerdem in einem engen Zusammenhang mit dem Stokes-System, wie beispielsweise in [7] gezeigt wird.

Sei

$$Z(\Omega) := \{z \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^\rho(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} z = 0, \operatorname{rot} z = 0, (\nu, z)|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (3.167)$$

wobei  $0 < \rho < 1$  gelte. Elemente aus  $Z(\Omega)$  werden als Neumann-Felder in  $\Omega$  bezeichnet. Ferner sei  $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  und

$$H(\hat{\Omega}) := \{h \in C^0(\bar{\hat{\Omega}}) \cap C^1(\Omega) \mid \operatorname{grad} h = 0, |h(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-2}) \text{ für } |x| \rightarrow \infty\}. \quad (3.168)$$

Unter  $\{\hat{h}^1, \dots, \hat{h}^m\}$  verstehen wir eine Basis von  $H(\hat{\Omega})$ .

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet,  $v \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $S \subset \Omega$  eine glatte, doppelpunkt-freie, geschlossene und orientierte Fläche und die Einheitsnormale  $\nu$  so gewählt, dass  $\nu$  positiv orientiert hinsichtlich der Orientierung von  $S$  ist, dann heißt

$$E := \int_S (\nu, f) d\omega \quad (3.169)$$

die *Ergiebigkeit* des Feldes  $f$  bezüglich der Fläche  $S$ . Ein Feld  $f$  wird als *ergiebigkeitsfrei* bezeichnet, wenn die Ergiebigkeit bezüglich jedes  $S \subset \Omega$  verschwindet.

### Satz 3.4 Integrabilitätsbedingungen

Für die Lösbarkeit des Problems  $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$  durch ein Feld  $f$  müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(i)  $g$  ist ergiebigkeitsfrei, d. h.

$$\int_S (\nu_S, f) d\omega = 0 \text{ für alle } S \subset \Omega. \quad (3.170)$$

(ii) Für die Flächendivergenz  $\text{div}_S$  von  $\gamma$  gilt

$$\text{div}_S \gamma = (\nu, \gamma), \text{ falls } f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3). \quad (3.171)$$

(iii) Weiterhin gilt

$$\int_{\Omega} (g, z) dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma, z) d\omega \text{ für alle } z \in Z(\Omega) \quad (3.172)$$

### Satz 3.5 Lösung des Problems $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$

(i) Sei  $f$  eine Lösung von  $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$ . Dann genügt die Normalkomponente  $\epsilon = -(\nu, f)$  auf  $\Omega$  der Integralgleichung

$$\begin{aligned} \epsilon(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right) (x, x') \epsilon(x') d\omega_{x'} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} (\nu(x), \text{grad} \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon(x')}{|x - x'|} dx' - \text{rot} \left( \int_{\Omega} \frac{g(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\gamma(x')}{|x - x'|} \right)), \end{aligned} \quad (3.173)$$

wobei  $x \in \partial\Omega$ , und den Nebenbedingungen

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon \hat{h}^i|_{\partial\Omega} d\omega = E^i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.174)$$



(ii) Ist  $\epsilon \in C^0(\partial\Omega)$  Lösung der Integralgleichung (3.173), genügt den Nebenbedingungen (3.174), ist  $\gamma \in C^1(\partial\Omega)$ ,  $g \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und gelten die Integrabilitätsbedingungen des Theorems 3.4, dann ist  $f$  mit

$$f = -\text{grad } U + \text{rot } A, \quad (3.175)$$

wobei  $U$  gegeben ist durch das skalare Potential

$$U(x) := \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\Omega} \frac{h(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon(x')}{|x - x'|} d\omega'_x \right) \quad (3.176)$$

und  $A$  durch das Vektorpotential

$$A(x) := \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\Omega} \frac{g(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\gamma(x')}{|x - x'|} d\omega'_x \right), \quad (3.177)$$

Lösung des Problems  $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$ .

### 3.5 Übungsaufgaben

#### Aufgabe 1

Gegeben sei eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung  $\rho \in C_0(\mathbb{R}^3)$ . Zeigen Sie, dass sich, ausgehend vom Coulombgesetz

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx',$$

Potential und Feldstärke in der Form

$$\phi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} + 4\pi \int_r^\infty \rho(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r}$$

bzw.

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2} e_r \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

schreiben lassen. Berechnen Sie nun für alle Raumpunkte das Potential einer homogen geladenen Kugel mit Radius  $R$ .

#### Aufgabe 2

Im Grundzustand des  $H$ -Atoms ist die Elektronenladung mit der Dichte

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

verteilt. Dabei ist  $a$  der Bohrradius und  $e = -|e|$ . Bestimmen Sie das Potential  $\phi(r)$  und die Feldstärke  $E(r)$ , die im Atom herrschen, wenn man sich den Kern als eine im Ursprung lokalisierte Punktladung denkt.

#### Aufgabe 3

Welche Ladungsverteilung liegt dem Yukawa-Potential

$$\phi(x) = \frac{Q}{|x|} e^{-\alpha|x|} = Q\left(\frac{1}{|x|} + \frac{e^{-\alpha|x|} - 1}{|x|}\right)$$

zu Grunde?

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie das Potential  $\phi(x)$  und die Feldstärke  $E(x)$  eines unendlich langen Zylinderkondensators mit der Flächenladungsdichte  $-|\sigma|$  auf dem inneren Zylinder (Radius  $r_i$ ) und  $+|\sigma|$  auf dem äußeren Zylinder (Radius  $r_a$ )

- durch Ausnutzung von Symmetrieargumenten und Verwendung des Gaußschen Satzes,
- durch Lösen der Laplace-Gleichung.

**Aufgabe 5**

Gegeben ist die Flächenladungsdichte  $\sigma(x, y)$ , wobei  $\sigma \in C_0^0(\mathbb{R}^2)$ .

- Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Gleichung, dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0+) - \frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0-) = -4\pi\sigma.$$

- Sei

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y).$$

Bestimmen Sie, mit Hilfe der Laplace-Gleichung und der Sprungrelation des Aufgabenteils a), ein durch die Ladungsverteilung erzeugtes Potential.

**Aufgabe 6**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten und einem Rand der Klasse  $C^1$ . Ferner sei  $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$  eine Lösung der Laplace-Gleichung (d. h. eine harmonische Funktion).

- Beweisen Sie, dass

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\omega = 0.$$

- Beweisen Sie die Mittelwertformel

$$\phi(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \phi(x) d\omega$$

welche beispielsweise ausdrückt, dass in einem ladungsfreien Raumbereich der Wert des elektrostatischen Potentials an einem beliebigen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  gleich dem Potentialmittelwert über die Oberfläche  $S \subset\subset \Omega$  einer Kugel mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $r$  ist.

**Aufgabe 7**

Gesucht ist eine Lösung  $\phi$  und die Greensche Funktion  $G$  der Poisson-Gleichung für den Bereich  $H := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0\}$ .

- a) Berechnen Sie zunächst  $G(x, x')$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^3$ , für das Feld einer Elementarladung am Ort  $x'$  mit einem geerdeten Rand  $z = 0$ .
- b) Welche anschauliche Bedeutung hat  $F(x, x')$  in

$$G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|} + F(x, x')?$$

- c) Sei  $\phi$  eine Lösung der Laplace-Gleichung, die nur von  $r$  aus den Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, x_3)$  abhängt. Weiterhin gelte

$$\phi|_{\partial H \cap \partial B_{r_i}} = V_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2.$$

Dabei sei  $B_r := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  mit  $r > 0$ .  
Geben Sie  $\phi(r)$  an.

**Aufgabe 8***Potential einer Dipolschicht*

Eine Fläche  $S \subset \mathbb{R}^3$  sei mit einer Dipolschicht belegt. Sei  $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  die Dipolmomentdichte und

$$|p| = \int_S D(x) d\omega$$

das gesamte Dipolmoment der Fläche. Das Vektorfeld  $\nu(x)$ , mit  $|\nu| = 1$ , weise in Richtung des lokalen Dipolmomentes. Zeigen Sie, dass sich das Potential  $\phi$  der Dipolschicht als

$$\phi(x) = \int_S D(x') (\nu(x'), \nabla_{x'} \frac{1}{|x - x'|}) d\omega_{x'}$$

schreiben lässt.

**Aufgabe 9**

Ein Kugelkondensator mit den Radien  $a$  und  $b > a$  ist mit einem Dielektrikum, für dessen Dielektrizitätsfunktion  $\epsilon$

$$\epsilon(r) = \epsilon_1 \frac{a^2}{r^2} > \epsilon_0 \quad \text{für alle } r \in (a, b)$$

gilt, gefüllt. Die innere (äußere) Kugel trage die Ladung  $q$  ( $-q$ ).

- Berechnen Sie  $E(x)$ ,  $D(x)$ ,  $P(x)$ ,  $\phi(x)$  und, für die Polarisationsladungen,  $\rho_p(x)$  und  $\sigma_p(x)$ .
- Wie groß ist die Kapazität der Anordnung?

**Aufgabe 10**

Eine ebene, in  $x$ - und  $y$ -Richtung unbegrenzte Platte der Dicke  $d$  besteht aus einem Dielektrikum. Für dieses anisotrope Dielektrikum gelte

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k, \quad i = 1, 3,$$

wobei  $\epsilon_{ik} \in \mathbb{R}$  konstant sind. Es wirke ein Feld

$$E_0 = E_{0x} e_x + E_{0z} e_z.$$

- Berechnen Sie  $E(x)$ ,  $D(x)$  und  $P(z)$  für das Gebiet innerhalb des Dielektrikums.
- Berechnen Sie  $\rho_p(x)$  und  $\sigma_p(x)$ .
- Berechnen Sie den Brechungswinkel  $\vartheta$  von  $E$  an der Grenzfläche  $z = 0$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\vartheta_0$ .

**Aufgabe 11**

Gegeben sei ein unendlich ausgedehntes Dielektrikum mit einer homogenen Polarisation

$$P(x) = P_0 e_z,$$

wobei  $P_0 \in \mathbb{R}$  konstant ist. In diesem Dielektrikum werde ein kugelförmiger Hohlraum geschaffen.

- Angenommen, der Hohlraum beeinflusse die Polarisation im umgebenden Dielektrikum nicht. Berechnen Sie für diesen Fall  $E(x)$  und  $P(x)$ .
- Behandeln Sie nun den üblichen Fall, dass sich  $P$  den neuen Gegebenheiten anpasst. Berechnen Sie  $E(x)$  und  $P(x)$ .

**Aufgabe 12**

- a) Ein Dielektrikum in Form eines langen, dünnen Kreiszylinders mit Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$  befinde sich in einer homogenen Flüssigkeit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_2$ . Wie wird sich der Zylinder ausrichten, wenn ein homogenes äußeres Feld angelegt wird?
- b) Wie ist das Ergebnis im Fall einer dünnen Platte?

**Aufgabe 13**

Gegeben sei ein in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnter Kreiszylinder mit dem Radius  $R$ , der von einem Strom  $I$  homogen durchflossen wird.

- a) Berechnen Sie (ohne  $B$  zu berechnen) das Vektorpotential  $A(x)$  mit Coulomb-Eichung.
- b) Berechnen Sie  $B$  mit Hilfe der Lösung aus Aufgabenteil a).
- c) Das Problem des stromdurchflossenen Zylinders wird oft mit Hilfe der integralen Darstellung des Ampèreschen Gesetzes gelöst. Dabei nutzt man aus, dass sich  $B$  in Zylinderkoordinaten als

$$B(x) = B_\varphi(\rho)e_\varphi$$

schreiben lässt. Beweisen Sie diese Darstellung mit Hilfe der Symmetrie des Problems, des Ampèreschen Gesetzes, des Gesetzes über den magnetischen Fluss und der Abklingbedingung

$$B(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

**Aufgabe 14**

Berechnen Sie die Kraft, die eine stromdurchflossene, kreisförmige Leiterschleife (Strom  $I_1$ , Radius  $a$ ) im Magnetfeld eines langen, geraden, vom Strom  $I_2$  durchflossenen Drahtes erfährt. Der Abstand  $d$  vom Kreismittelpunkt zum Draht sei stets größer als der Radius  $a$  des Kreises. Dabei sollen folgende Fälle behandelt werden:

- a) Die Leiterschleife und der gerade Draht liegen in der gleichen Ebene.
- b) Der gerade Draht liege außerhalb der Kreisebene, aber parallel zu ihr, wobei sich der Mittelpunkt des Kreises senkrecht unter dem Draht befinde.

*Hinweise*

- (i) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{1 - \epsilon \cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{\epsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} - 1 \right) \quad \text{für } \epsilon < 1.$$

(ii) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}.$$

### Aufgabe 15

Betrachtet werde ein stromfreies Gebiet  $\Omega$  mit der Magnetisierung  $M(x)$ .

a) Leiten Sie aus den Grundgleichungen der Magnetostatik die Gleichung

$$\Delta A(x) = -\frac{4\pi}{c} j_M(x)$$

für das Vektorpotential her. Dabei sei

$$j_M(x) := c \operatorname{rot} M(x).$$

b) Zeigen Sie für die Lösung

$$A(x) = \int_{\Omega} M(x') \times \operatorname{grad}' \frac{1}{|x - x'|} dx'$$

jener Gleichung, dass sich  $A$  folgendermaßen schreiben lässt:

$$A(x) = \int_{\Omega} \frac{\operatorname{rot}' M(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{M(x') \times \nu(x')}{|x - x'|} d\omega_{x'}.$$

Dabei bezeichnet  $\nu$  die äußere Einheitsnormale.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der zweiten Formel aus Aufgabenabschnitt b) die Größen  $B(x)$  und  $H(x)$  der homogen magnetisierten Kugel mit

$$M(x) := \begin{cases} M_0 e_z & \text{für } |x| \leq R \\ 0 & \text{für } |x| > R. \end{cases}$$

**Aufgabe 16**

Sei  $C(t)$  ein geschlossener Pfad, der sich in der Zeit verändern darf, und  $f(x, t)$  sei ein Kraftfeld. Die elektromotorische Kraft  $\varepsilon(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ist definiert durch

$$\varepsilon(t) := \oint_{C(t)} \frac{f(x, t)}{q} dx.$$

Zeigen Sie, dass aus

$$\operatorname{rot} E(x, t) = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$$

für eine vorgegebene, zeitabhängige Fläche  $S(t)$  die Gleichung

$$\varepsilon_{em}(t) = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} (B(x, t), \nu(x)) d\omega_x$$

folgt, bestimmen Sie die spezielle elektromotorische Kraft  $\varepsilon_{em}(t)$  und interpretieren Sie die in dem Ausdruck von  $\varepsilon_{em}(t)$  auftretenden Kraftterme  $f_{em}(x, t)$ .

*Hinweis:* Gegeben sei ein Vektorfeld  $Q(x, t)$  und eine Fläche  $S(t)$  mit Randkurve  $C(t) := \partial S(t)$ . Die Normale  $\nu(t)$  bilde mit der Orientierung von  $C(t)$  eine Rechtsschraube. Ferner verändere sich die Fläche  $S(t)$  mit der Geschwindigkeit  $v(x, t)$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} (Q(x, t), \nu) d\omega = \int_{S(t)} \left( \frac{\partial Q}{\partial t}, \nu \right) d\omega + \int_{S(t)} (v, \nu) \operatorname{div} Q d\omega - \oint_{C(t)} ((v \times Q), \tau) ds.$$

**Aufgabe 17***Magnetische Monopole*

Eine hypothetische magnetische Ladung  $q_m$  erzeugt das Feld

$$B(x) = \frac{q_m}{r^3} e_r.$$

In einem elektromagnetischen Feld erfährt sie die „Lorentzkraft“

$$F = q_m \left( B - \frac{1}{c} v \times B \right).$$

- Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ruhe eine magnetische Ladung  $q_m$  im Ursprung und eine elektrische Ladung  $q_e$  an der Stelle  $r_0$ . Zeigen Sie, dass dann die Ladungen für alle Zeiten ruhen.
- Sei  $x_0 = (0, 0, |x_0|)$ . Berechnen Sie den Drehimpuls

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} x \times \frac{1}{4\pi c} (E \times B) dx$$

des durch das Paar  $\{q_m, q_e\}$  erzeugten elektromagnetischen Feldes.



- c) Geben Sie eine Quantisierungsbedingung für die elektrische Ladung  $q_e$  bei vorgegebener Monopolladung  $q_m$  an, falls

$$L_z = \frac{\hbar}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gilt.

### Aufgabe 18

Durch

$$\epsilon(\omega) := \epsilon_p + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

ist eine komplexwertige Dielektrizitätsfunktion  $\epsilon$  definiert, die sowohl die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_p \in \mathbb{R}_+^*$  der Polarisationsladungen als auch die Leitfähigkeit  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$  enthält. Wir setzen voraus, dass die kartesischen Komponenten der  $E$ - und  $B$ -Felder räumlich und zeitlich gemäß

$$\exp(i(k, x) - i\omega t)$$

variieren, das Ohmsche Gesetz in der Form

$$j = \sigma E$$

und  $\mu = 1$  gilt.

*Anmerkung:*

Wir schreiben hier

$$(f, g) := fg := \sum_{i=1}^3 f_i g_i$$

für komplexwertige Funktionen  $f_i, g_i$  (im Unterschied zu dem üblichen inneren Produkt komplexwertiger Funktionen).

Beachten Sie, dass  $k = k_1 + ik_2$ , mit  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^3$  ist.

- a) Leiten Sie, ausgehend von den Maxwell-Gleichungen, die Beziehung

$$(k, E_0) = 0$$

her.

- b) Seien  $k_1$  und  $k_2$  parallel. Wie sind  $k_i$ ,  $E$  und  $B$  gerichtet? Welche Phasenbeziehung besteht zwischen  $E$  und  $B$ ? Wie lautet die Dispersionsbeziehung  $|k(\omega)|$ ?

**Aufgabe 19**

Bei hinreichend niedriger Dichte lässt sich die dielektrische Wirkung eines atomaren Systems durch das Modell eines anharmonischen Oszillators beschreiben. Dabei betrachten wir ein gebundenes Elektron in einem räumlich konstanten Feld

$$E_0 e^{-i\omega t}, \text{ mit } E_0 \in \mathbb{R}^3,$$

und schreiben

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \text{ mit } x \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Berechnen Sie, unter der Voraussetzung, dass alle Elektronen zur Polarisierung den gleichen Beitrag liefern, die Polarisierung  $P$  und die Verschiebungsdichte  $D$ . Bestimmen Sie, mit

$$P(\omega) = \chi(\omega) E(\omega)$$

und

$$D(\omega) = \epsilon(\omega) E(\omega),$$

die Größen  $\chi(\omega)$  und  $\epsilon(\omega)$ . Skizzieren Sie den Real- und den Imaginärteil von  $\epsilon(\omega)$ .

- b) Betrachten Sie die Dispersionsbeziehungen des Systems bei verschwindender Absorption ( $\gamma \rightarrow 0$ ). Berechnen und skizzieren Sie den Real- und Imaginärteil von  $k(\omega)$ .
- c) In einem vereinfachten Modell eines Metalls werden die in Aufgabenteil a) beschriebenen Elektronen nun als ungebunden betrachtet. Bestimmen Sie nun, mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, die Leitfähigkeit  $\sigma(\omega) \in \mathbb{C}$  und

$$\epsilon(\omega) := \epsilon_p(\omega) + 4\pi i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}.$$

Berechnen Sie und skizzieren Sie  $k(\omega)$ .

## Literatur

- [1] O. Forster, *Analysis 3*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1983)
- [2] C. Gerthsen, H. O. Kneser, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag
- [3] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1975)
- [4] R. Kress, Grundzüge einer Theorie der verallgemeinerten harmonischen Vektorfelder, *Methoden Verfahren Math. Phys.* 2, 49-83, 1969
- [5] K. Simonyi, *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [6] H. Triebel, *Höhere Analysis*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. (1980)
- [7] W. von Wahl, *Vorlesung über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes*. Vorlesungsreihe des SFB 256: Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 11, Bonn (1989).