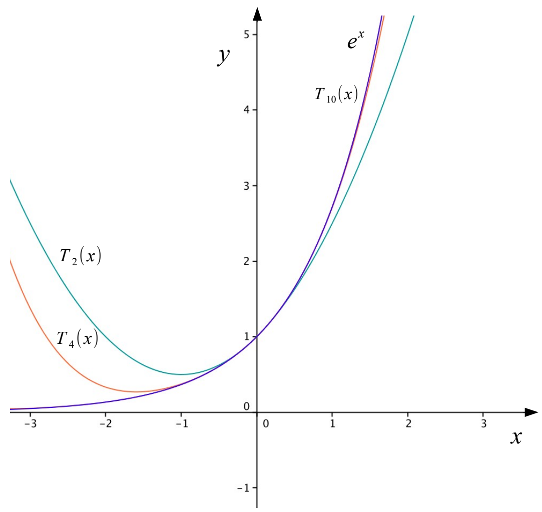
X, 1–164 (2020)

Mathematik für Chemiker

Dr. Jürgen Bolik

Technische Hochschule Nürnberg



Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen, Komplexe Zahlen und Polynome

1.1 Definitions- und Wertebereich

Seien $D, W \subset \mathbb{R}$. Eine reellwertige (reelle) *Funktion* auf D ist eine *Abbildung*

$$f : D \to W\,.$$

Dabei wird jedem $x \in D$ genau ein $y \in W$ zugeordnet. Statt $x \mapsto y$ schreiben wir auch

$$x \mapsto f(x)$$

mit $y = f(x)$.
Die Menge

- D heißt *Definitionsbereich* von f,
- W heißt *Wertebereich* von f.

Der *Graph* einer Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}$$

ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}\,.$$

Unter einer *Abbildung* $f \subset D \times W$ wird eine *Relation* verstanden, die

- *allen* Elementen aus D ein Element aus W zuordnet, wobei
- diese Zuordnung *eindeutig* ist.

Die Menge

$$f[T] := \{f(x) \,|\, x \in T \subset D\}$$

heißt *Bild* von T unter f.

Eine Abbildung (Funktion) $f : D \to W$ heißt

- *surjektiv*, wenn $f[D] = W$ ist.
- *injektiv*, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ die Eigenschaft $x_1 = x_2$ folgt.
- *bijektiv*, wenn f surjektiv und injektiv ist.

1.2 Graphische Darstellung einer Funktion

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen

$$f : x \mapsto x^n$$

sind in ganz $\mathbb{R}$ definiert und wir können $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben.

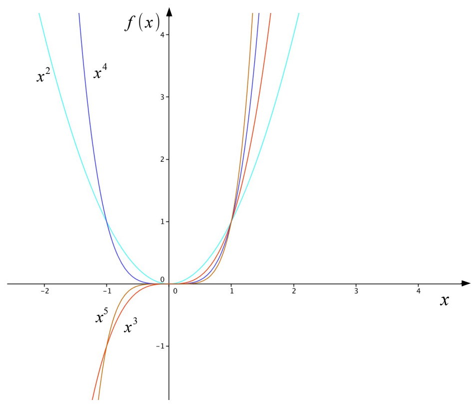


Abbildung 1.1 Die Graphen der Funktionen x^n mit $n = 2, 3, 4, 5$

Die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiert und wir können $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ schreiben.

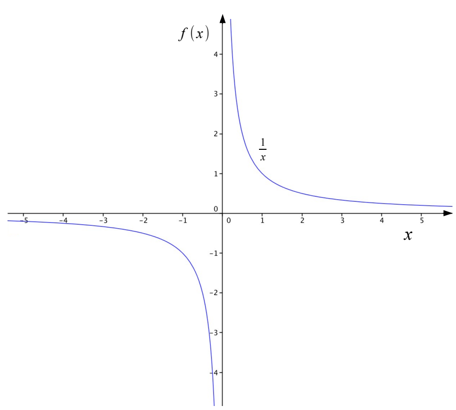


Abbildung 1.2 Der Graph von $\frac{1}{x}$

1.3 Monotonie

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $x, x' \in D$ mit $x < x'$. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

- *monoton wachsend*, wenn
$$f(x) \leq f(x')\,,$$
- *streng monoton wachsend*, wenn
$$f(x) < f(x')\,,$$
- *monoton fallend*, wenn
$$f(x) \geq f(x')\,,$$
- *streng monoton fallend*, wenn
$$f(x) > f(x')\,.$$

Beispiele

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f : x \mapsto x^2$$

ist streng monoton fallend für $x \leq 0$ und streng monoton steigend für $x \geq 0$.

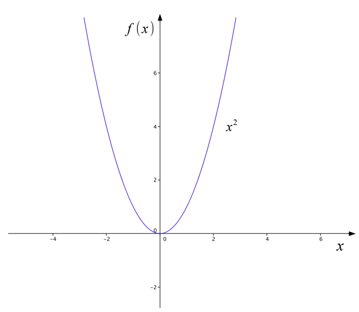


Abbildung 1.3 Der Graph der Funktion x^2

Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a \neq 1$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f : x \mapsto \log_a x$$

ist streng monoton fallend für $0 < a < 1$ und streng monoton steigend für $a > 1$.

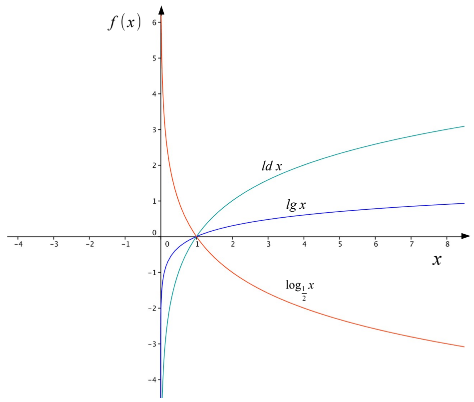


Abbildung 1.4 Die Graphen von ld x, lg x und $\log_{\frac{1}{2}} x$

1.4 Umkehrfunktion

Seien $D, M \subset \mathbb{R}$. Ist die *Funktion*

$$f : D \to M$$

bijektiv, so existiert eine Funktion f^{-1}

$$f^{-1} : M \to D$$

mit der Eigenschaft

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y\,.$$

Diese Funktion wird als *Umkehrfunktion* bezeichnet.

Satz: Sei

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige, streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) Funktion. Dann bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(a), f(b)]$ (bzw. $[f(b), f(a)]$) ab, und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R} \;\; \text{(bzw. } [f(b), f(a)] \to \mathbb{R}\text{)}$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Beispiele

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \sqrt{x}\,.$$

wird als Quadratwurzel bezeichnet.

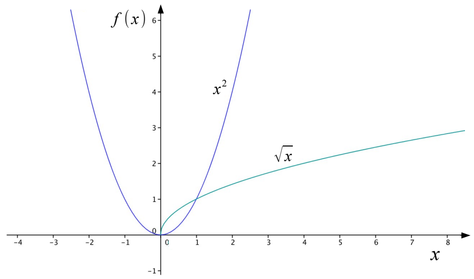


Abbildung 1.5 Die Graphen von x^2 und $\sqrt{x}$

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2^x$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \log_2(x)\,.$$

wird als dualer Logarithmus bezeichnet.

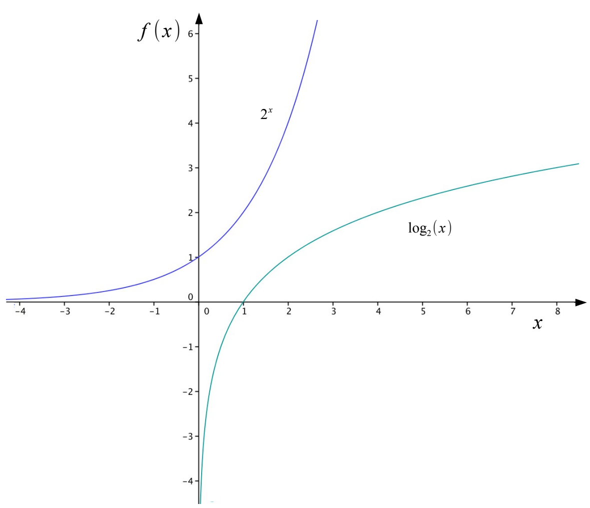


Abbildung 1.6 Die Graphen von 2^x und $\log_2(x)$

(iii) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto a^x$$

ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$. In beiden Fällen wird $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abgebildet. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \log_a(x)$$

ist stetig. Diese wird als Logarithmus zur Basis a bezeichnet.

Logarithmen verschiedener Basen

Seien $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a, b \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Es gilt

$$\log_a x = \log_a(b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_a b$$

und daher

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,.$$

Häufig verwendete Basen a sind

- $a = 2$: dualer Logarithmus ld
- $a = e = 2,71828....$ (*Eulersche Zahl*): natürlicher Logarithmus ln
- $a = 10$: dekadischer Logarithmus lg.

Rechenregeln

Es gilt

$$\log_a a^x = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

Sei $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)\,,$$

$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)\,,$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)\,.$$

(iv) *Die Umkehrfunktionen von* $\sin$, $\cos$ *und* $\tan$

Für die Umkehrfunktion $\arcsin$ von $\sin$ gilt

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,,$$

und für die Umkehrfunktion $\arccos$ von $\cos$ gilt

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]\,.$$

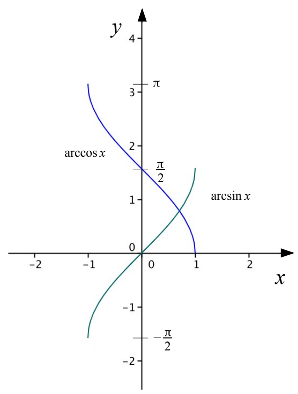


Abbildung 1.7 Die Graphen Funktionen $\arcsin$ und $\arccos$

Für die Umkehrfunktion $\arctan$ von $\tan$ gilt

$$\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,.$$

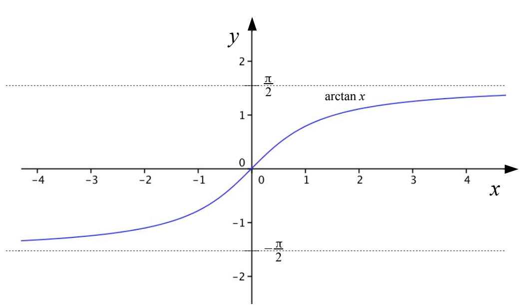


Abbildung 1.8 Der Graph der Funktion $\arctan$

1.5 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir schreiben für die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$, wobei

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} .$$

Um auch die Zahl 0 zu berücksichtigen, schreiben wir

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} .$$

Die Menge der *ganzen Zahlen* ist

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} .$$

Wir schreiben für die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$, wobei

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} .$$

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der *reellen Zahlen*.

Setzen wir

$$i := \sqrt{-1}$$

so lassen sich weitere quadratische Gleichungen lösen. Die dabei verwendeten Zahlenmenge bezeichnen wir als die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Diese lassen sich als

$$z = x + iy\,,\ x, y \in \mathbb{R}$$

darstellen. Dabei heißt x der Realteil $Re(z)$ und y der Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$.

Beispiele zur Lösung quadratischer Gleichungen

- Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = -b^2$ lauten

  $$x_{1,2} = \pm ib\,.$$

- Die Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ ist äquivalent zu $(x - 1)^2 = -2^2$. Daher erhalten wir als Lösung

  $$x_{1,2} = 1 \pm 2i\,.$$

Die konjugiert komplexe Zahl

Die *euklidische Norm* $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ eines Vektors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ definiert.

Mit Hilfe der *konjugiert komplexen Zahl*

$$\overline{z} := x - iy\,.$$

lässt sich der Wert $x^2 + y^2$ auch als Produkt von z und $\overline{z}$ schreiben, da

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2\,.$$

In der Gaußschen Zahlenebene wird die Konjugation einer komplexen Zahl durch Spiegelung an der reellen Achse dargestellt:

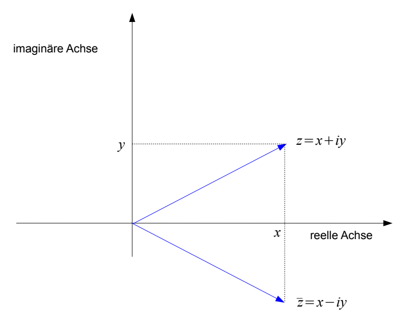


Abbildung 1.9 Die konjugiert komplexe Zahl

Ist $Im(z) = 0$, so gilt $\overline{z} = z$.

Rechenregeln für die Konjugation

Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Der Betrag einer komplexen Zahl

Unter dem Betrag einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ versteht man die Größe

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist daher mit dem euklidischen Abstand des Punktes z vom Nullpunkt in der Gaußschen Zahlenebene identisch.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\overline{z}| = |z|$.

Der Betrag einer komplexen Zahl

- Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt stets $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.
- Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Anmerkung: Es lässt sich auch zeigen, dass

$$|z_1 - z_2| \geq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

gilt.

Mit Hilfe des Betrages, können wir auch den *euklidischen Abstand* $dist(z_1, z_2)$ zweier Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene definieren:

$$dist(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|\,.$$

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt in der komplexen Zahlenebene und $r \in \mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.

- Die Punktmenge
$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$$
ist die Kreisscheibe (ohne Rand) mit Radius r um den Punkt z_0.
- Die Punktmenge
$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}$$
ist die Kreislinie mit Radius r um den Punkt z_0.

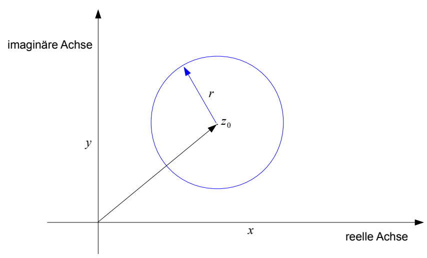


Abbildung 1.10 Eine Kreislinie in der komplexen Ebene

Die *Polarkoordinaten* $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sind gegeben durch die kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mittels
$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)\,.$$
Dabei gilt
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}\,.$$
Die Größe φ gibt den Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl von 0 durch (x, y) an.

Betrachten wir statt der Ebene $\mathbb{R}^2$ die komplexe Ebene, so erhalten wir
$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\,,$$
wobei auch der Ursprung $z = 0$ zugelassen ist.

Anmerkung zu Winkelmaßen

Für Winkel in Bogenmaß gilt:

$$\varphi := \frac{b}{r}$$

Ist $b = 2\pi r$, so gilt $\varphi = 2\pi$.

Somit gilt $360^\circ = 2\pi\ rad$ und $1\ rad = \dfrac{180^\circ}{\pi}$.

Für $z \neq 0$ ist der Winkel φ durch die Angabe der kartesischen Koordinaten eindeutig bestimmt.

Dieser Winkel wird als Argument von z bezeichnet. Wir schreiben

$$\varphi = \arg z\,.$$

Um den Winkel φ eindeutig zu bestimmen, wird üblicherweise vorausgesetzt, dass

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{oder} \quad -\pi < \varphi \leq \pi\,.$$

Darstellung der Multiplikation in der komplexen Zahlenebene

Sei $z, w \in \mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ und $\arg z = \varphi$, $\arg w = \psi$.
Dann erhalten wir, mit Hilfe der Additionstheoreme (Abschnitt 1.6) der trigonometrischen Funktionen,

$$wz = |w| \cdot |z|(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i\sin(\psi + \varphi))\,.$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden

- die Beträge multipliziert und
- die Argumente addiert.

Ist $w \in \mathbb{C}^*$ fest, so ist die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto wz$$

eine *Drehstreckung* und, im Falle von $|w| = 1$, eine Drehung.

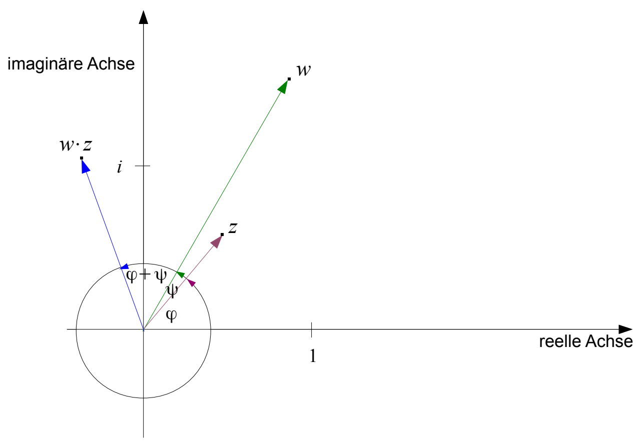


Abbildung 1.11 Multiplikation in $\mathbb{C}$

Das hinsichtlich der Multiplikation inverse Element von $z \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,.$$

Daher gilt für die Division von $w \in \mathbb{C}^*$ durch $z \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|}(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$= \frac{|w|}{|z|}(\cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi))\,.$$

Anmerkung: Dabei verwenden wir Symmetrieeigenschaften und Additionstheoreme (Abschnitt 1.6) der trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$, die in folgendem Abschnitt vorgestellt werden.

1.6 Die Exponentialfunktion und Trigonometrische Funktionen

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$, und analog in $\mathbb{C}$, wird mit Hilfe einer (absolut konvergenten) Reihe, der *Exponentialreihe*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\;\; x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definiert.

Damit lässt sich zeigen, dass

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \;\; \text{für}\, x, y \in \mathbb{R}$$

und mit Hilfe dieser Funktionalgleichung wiederum, dass

$$\exp(x) > 0 \;\; \text{für}\, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} \;\; \text{für}\, x \in \mathbb{R}$$

und

$$\exp(n) = e^n \;\; \text{für}\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\;\; z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Die Exponentialfunktion $\exp$ ist in $\mathbb{C}$ stetig.

Ferner gilt

- die Funktionalgleichung

  $$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \;\; \text{für alle}\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,$$

- die Eigenschaft $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$
- und $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|e^{ix}| = 1\,,$$

da

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1\,.$$

Wir können daher e^{ix} als Punkt des Einheitskreises in der komplexen Ebene darstellen:

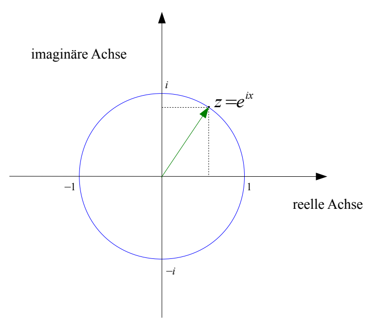


Abbildung 1.12 Die Zahl e^{ix} als Punkt am Einheitskreis

Mit Hilfe der Definition

$$\cos x := Re(e^{ix}) \text{ und } \sin x := Im(e^{ix})$$

folgt unmittelbar die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \,.$$

Die Variable x lässt sich sich als (orientierte) Bogenlänge verstehen.

Betrachten wir neben e^{ix} auch e^{-ix}, so können wir auch folgende Gleichungen herleiten:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \text{ und } \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\,.$$

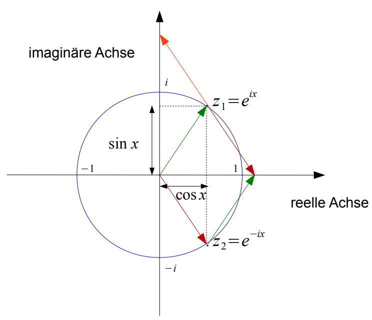


Abbildung 1.13 Die Winkelfunktionen cos und sin

Nach der Definition der trigonometrischen Funktion cos und sin und der Definition der Exponentialfunktion zeigt sich, dass

$$\cos(-x) = \cos x \,, \quad \sin(-x) = -sin(x)$$

und

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir eine einfache Herleitung folgender *Additionstheoreme* :

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Begründung: Gemäß der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}\,,$$

und umgeformt, mittels der Eulerschen Formel,

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$$

$$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\,.$$

Analog zu den Beziehungen für *Sinus* $\sin$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

und *Cosinus* $\cos$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

werden die Funktionen *Sinus hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

und *Cosinus hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

definiert.

Die Hyperbelfunktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind stetig.

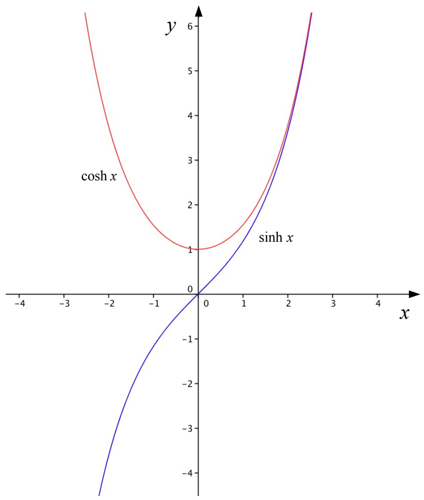


Abbildung 1.14 Die Hyperbelfunktionen $\cosh$ und $\sinh$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

und

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

definiert.

Die Umkehrfunktionen von $\sinh$, $\cosh$ und $\tanh$ heißen arsinh, arcosh bzw. artanh.

1.7 Der Fundamentalsatz der Algebra

Die Gleichung

$$z^n - a = 0\,, \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^*,$$

lässt sich auch als Aufgabe, die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^n - a$$

zu finden, verstehen.

Um quadratische Polynome in Linearfaktoren zu zerlegen, gibt es einfache Verfahren. Nun stellt sich die Frage, ob sich Polynome auch allgemein in Linearfaktoren zerlegen lassen, wenn der Zahlenkörper $\mathbb{R}$ oder aber $\mathbb{C}$ vorausgesetzt wird.

Allgemein sind Polynome in $\mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:

Sei $a_m \in \mathbb{C}$, $m = 0, 1, ..., n$, und $a_n \neq 0$. Dann ist

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

ein Polynom vom Grade n.

Wir schreiben

- $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, wenn die Koeffizienten des Polynoms p komplexe Zahlen und
- $p(z) \in \mathbb{R}[z]$, wenn die Koeffizienten des Polynoms p reelle Zahlen sind.

Ein Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ heißt komplexes Polynom und ein Polynom $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ reelles Polynom.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Faktorisierungssatz: Das Polynom

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n,$$

mit $a_m \in \mathbb{C}, m = 0, 1, ..., n$ und $a_n \neq 0$,

lässt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) als Produkt

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (z - z_r)^{m_r}$$

schreiben. Dabei sind $z_1, ..., z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Nullstellen, deren jeweilige Vielfachheit $m_1, m_2, ..., m_r \in \mathbb{N}$ und $m_1 + m_2 + ... + m_r = n$.

Das Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ zerfällt also vollständig in Linearfaktoren.
Für Polynome $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ gilt

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z}).$$

Daher ist mit jeder Nullstelle z_l auch $\overline{z_l}$ eine Nullstelle.
Ferner ist

$$(z - z_l)(z - \overline{z_l})$$

ein reelles quadratisches Polynom.

Daraus folgt, dass sich jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ vom Grade $n \geq 1$, eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als Produkt reeller Linearfaktoren und reeller quadratischer Polynome darstellen lässt.

1.8 Anwendungen

1.8.1 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen

Harmonische Schwingungen genügen der Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \,.$$

Die allgemeine Lösung unserer Bewegungsgleichung hat folgende Form:

$$x(t) = c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t) \,.$$

Andere Darstellungen der allgemeinen Lösung lauten

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha_0)$$

und

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \,.$$

In der Ortsfunktion $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ bezeichnet

- A die *Amplitude*, d. h. die maximale Auslenkung aus der Ruhelage, und
- φ_0 den Nullphasenwinkel.

Die Ortsfunktion lässt sich als Realteil von

$$z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} =: z_0 e^{i\omega t}$$

darstellen. Die Amplitude

$$z_0 = Ae^{i\varphi_0}$$

ist hierbei komplex.

Es ist auch eine praktische Darstellung von $\cos$ und $\sin$ mit Hilfe des Einheitskreises möglich:

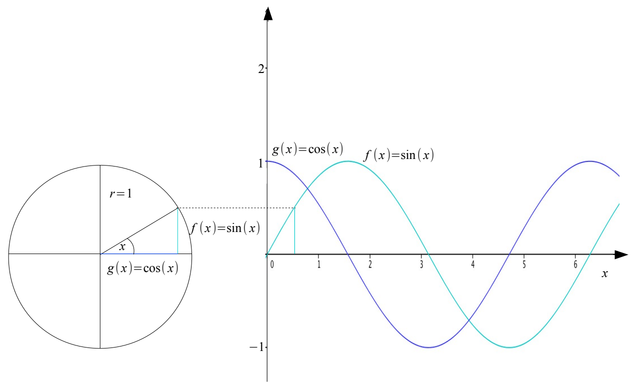


Abbildung 1.15 Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ und der Einheitskreis

Entsprechend können wir $e^{i\omega t+\varphi_0}$ als Punkt des Einheitskreises in der komplexen Ebene darstellen:

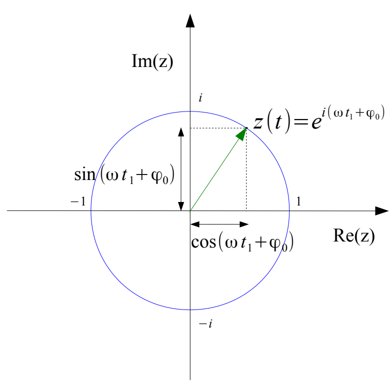


Abbildung 1.16 Die Funktion $e^{i(\omega t+\varphi_0)}$ und der Einheitskreis

1.8.2 Addition harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

Gegeben seien zwei harmonische Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz:

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

und

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)\,.$$

Die Resultierende beider Schwingungen ist gegeben durch

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2)\sin(\omega t) + (A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2)\cos(\omega t)\,.$$

Wir suchen zwei Konstanten A und α, so dass

$$A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2 = A\cos\alpha \ \text{ und } \ A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2 = A\sin\alpha\,.$$

Diese sind gegeben durch

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

und

$$\tan\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\,.$$

Damit können wir $y(t)$ auch folgendermaßen schreiben:

$$y(t) = A\cos\alpha\sin(\omega t) + A\sin\alpha\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \alpha)\,.$$

Andererseits lassen sich die beiden Gleichungen zur Bestimmung von A und α auch zu einer Gleichung in $\mathbb{C}$ zusammenfassen:

$$A_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) + A_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

erhalten wir

$$A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2} = Ae^{i\alpha} =: z_0\,.$$

Setzen wir

$$z_{0,1} = A_1 e^{i\alpha_1} \text{ und } z_{0,2} = A_2 e^{i\alpha_2} ,$$

so nimmt die vorangegangene Gleichung die einfache Form

$$z_{0,1} + z_{0,2} = z_0$$

an.

Die Addition zweier komplexer Zahlen lässt sich auch in einem Zeigerdiagramm veranschaulichen:

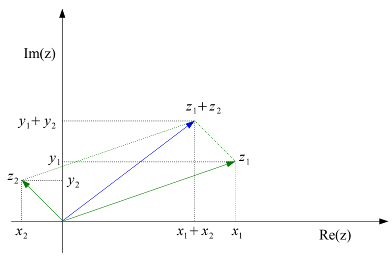


Abbildung 1.17 Zeigerdiagramm und Addition komplexer Zahlen

Die Addition sinusförmiger Schwingungen verschiedener Amplitude und Phase, aber gleicher Frequenz lässt sich mit Hilfe von Zeigerdarstellungen sehr einfach durchführen:

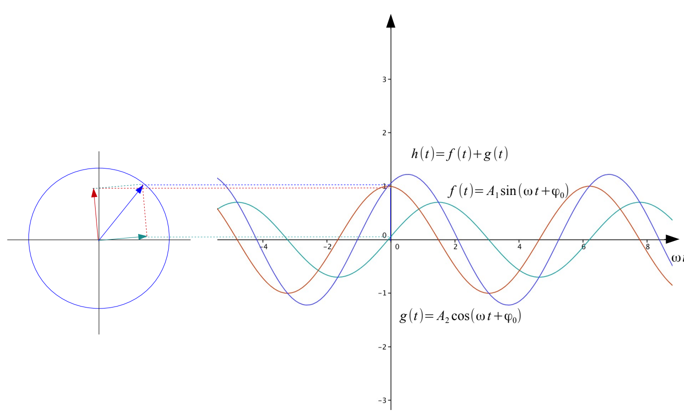


Abbildung 1.18 Addition sinusförmiger Schwingungen, Teil I

Wie das folgende Diagramm zeigt, ist die Amplitude der resultierenden Schwingung nicht notwendigerweise größer als die der einzelnen Schwingungen.

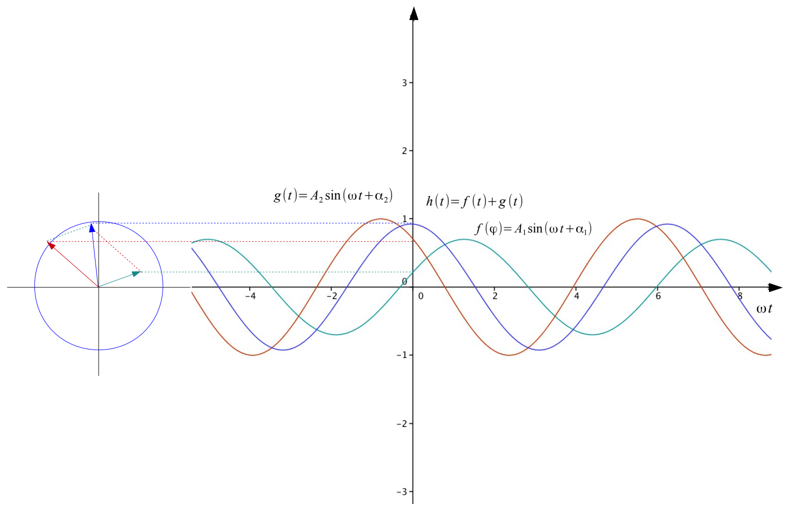


Abbildung 1.19 Addition sinusförmiger Schwingungen, Teil II

Die Funktion

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\alpha)} = z_0 e^{i\omega t}$$

genügt der Differentialgleichung

$$z''(t) + \omega^2 z(t) = 0\,.$$

Sowohl deren Real- als auch deren Imaginärteil repräsentieren harmonische Schwingungen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= Im(z(t)) = Im(z_0 e^{i\omega t}) = A \cdot Im(e^{i\alpha} e^{i\omega t}) = A \cdot Im(e^{i(\omega t+\alpha)}) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha)\,. \end{aligned}$$

Beispiel: Die Funktion

$$y(t) = \sin(\omega t) + \cos(\omega t)$$

lässt sich mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

umformen zu

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)\,,$$

wobei $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ und $A = \sqrt{2}$ sind.

Andererseits können wir A und φ_0 auch mittels $z(t) \in \mathbb{C}$ bestimmen. Hierzu betrachten wir die Funktionen

$$z_1(t) = e^{i\omega t}\,, \quad z_2(t) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\omega t}$$

und deren Summe

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = z_0 e^{i\omega t}\,.$$

Die komplexe Amplitude z_0 lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$z_0 = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Hieraus folgt

$$A = \sqrt{2}\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

und

$$y(t) = \sin(\omega t) + \cos(\omega t) = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})\,.$$

1.9 Übungsaufgaben: Funktionen, Komplexe Zahlen und Polynome

Aufgabe 1
Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $e^{-0{,}4x} = 10^{-2}\,,$

b) $e^{x} = e^{-3x+1}\,.$

Aufgabe 2
Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\ln x = -10^{5}\,,$

b) $\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt[3]{x} = 3\,,$

c) $\ln\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\,.$

Aufgabe 3
Es bezeichne $\mathbb{R}_+$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$x \mapsto x^2 - x + 1$$

injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Nullstellen von

a) $\cos x\,,$

b) $x^4 - 4x^2 - 45\,,$

c) $\sin(x - \frac{\pi}{4})\,.$

Aufgabe 5
Untersuchen Sie auf Monotonie:

a) $|x^2 - 2x + 1|$ für $x \geq 1$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{2x}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Aufgabe 6
Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}\,, \quad \text{wobei } \lambda > 0\,.$$

Für Radon $^{222}_{86}$Rn gilt $\lambda = 2{,}0974 \cdot 10^{-6}\, s^{-1}$. Berechnen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$.

Aufgabe 7
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von

a) $\dfrac{x^3}{x^2+1}$,

b) $\sin x \cdot \cos x$,

c) $\dfrac{1}{x-1}$.

Aufgabe 8
Eine gebrochenrationale Funktion f hat bei 2 eine einfache und bei -4 eine doppelte Nullstelle; sie hat Pole bei -1 und 1 und es gilt $f(0) = 4$. Sie hat keine weiteren Null- und Polstellen. Wie lautet die Abbildungsvorschrift?

Aufgabe 9
Zerlegen Sie die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2x^5 + x^4 - 4x^3 + 2x}{2x^4 - 4x^2 + 2}$$

in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenen rationalen Funktion. Bestimmen Sie die Asymptoten des Graphen.

Aufgabe 10
Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ an:

a) $z = (3 + 2i) + (5 - 7i)$, b) $z = (3 - i)(5 - 7i)$, c) $z = (\sqrt{3} + i)(-3 + \sqrt{3}\,i)$,

d) $z = (\sqrt{2} - 2i)^2$, e) $z = \sqrt{-4}$, f) $z = \overline{7 + 2i}$,

g) $z = \overline{(3 + 2i)(5 - 7i)}$, h) $z = \dfrac{5 - 10i}{3 + 4i}$, i) $z = \dfrac{-2 - 5i}{8 - 6i}$,

j) $z = \dfrac{1}{3 + 4i}$.

Aufgabe 11
Sei

$$z_1 = -4i\,,\ z_2 = 3 - 2i\,,\ z_3 = -1 + i\,.$$

Berechnen Sie

a) $z_1 - 2z_2 + 3z_3\,,$

b) $2z_1 \cdot \overline{z_2}\,,$

c) $\dfrac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3}\,.$

Aufgabe 12
Stellen Sie folgende komplexe Zahlen z in der Form $x + iy$, mit $x,\ y \in \mathbb{R}$, dar und skizzieren sie diese jeweils:

a) $\dfrac{1}{5 - 4i}\,,$

b) $\dfrac{1 - i}{1 + i}\,,$

c) $\dfrac{1}{(1 - i)^2}\,.$

Aufgabe 13
Berechnen Sie die Polarkoordinaten der folgenden komplexen Zahlen und stellen Sie diese komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar:

a) $4-i$, b) $-3-2i$, c) $-5+4i$,

d) $3i$, e) $-\sqrt{3}$, f) $-1-\sqrt{8}\,i$,

g) $\overline{-3+4i}$, h) $i(3+i)$, i) $\dfrac{3-i}{-i}$,

j) $\dfrac{1}{3+4i}$, k) $\dfrac{1}{1+i}$, l) $\dfrac{1+i}{1-i}$,

m) $\dfrac{1-i}{1+i}$, n) $(1+i)^4$.

Aufgabe 14
Lösen Sie folgende Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $x^2+x-1 \geq 0\,,$

b) $|x| \leq x-2\,,$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} < 1\,,$

d) $\dfrac{1}{1-x} > \dfrac{1}{1+x}\,,$

e) $-2x^2+14x-20 \leq 0\,,$

f) $\dfrac{1}{x}+x \geq 2\,,\;$ mit $x>0\,.$

Aufgabe 15
Stellen Sie die komplexen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften in der Form $z = x + iy$, mit $x,\, y \in \mathbb{R}$, dar:

a) $|z| = 2,\ \arg(z) = \pi,$

b) $|z| = \sqrt{2},\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4},$

c) $|z| = 4,\ \arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}.$

Aufgabe 16
Skizzieren Sie folgende Punktmengen:

a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < Re(z) < 2\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, Im(z) = Re(z)\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 2\}$, d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) = \frac{\pi}{3}\}$,

e) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \pi\}$, f) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \pi,\, |z| = 1\}$,

g) $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \,|\, \dfrac{z}{\bar{z}} = 1\}$, h) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z \cdot \bar{z} \geq 4\}$.

Aufgabe 17
Berechnen Sie folgende Potenzen:

a) i^{2007}, b) $(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i)^{1000}$, c) $(-1 + \sqrt{3}i)^{12}$,

d) $(\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}(1 - i))^{25}$, e) $(\dfrac{1}{2}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i)^{1000}$, f) $(-1 - \sqrt{3}\,i)^{12}$.

Aufgabe 18
Für welche Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$3x^2 + 6tx - 3t + 18 = 0$$

keine reellen Lösungen?

Aufgabe 19
Berechnen Sie

a) $(\dfrac{2}{\sqrt{3} + i})^{32}$,

b) $\mathrm{Im}(\dfrac{1}{(1 + i)^3})$,

c) $\mathrm{Re}(\dfrac{1 + 2i}{4 - (2 + i)^2})$,

d) $|e^{iz}|$ mit $z = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Aufgabe 20
Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0\,,$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0\,,$

c) $3x^2 + px + 3 = 0\,.$

Geben Sie für c) die Parameterwerte für $p \in \mathbb{R}$, die zu nicht-reellen Lösungen führen, an und bestimmen Sie die Lösung für $p = 5$.

Aufgabe 21

a) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$ folgender Gleichung an:

$$\frac{17+19i}{z-2i} + \frac{65-5i}{z+2i} = \frac{64z+28i}{z^2+4}\,.$$

b) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichung an:

$$\frac{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}+i\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-i\sqrt{1+x}} = 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ -1 \leq x \leq 1\,.$$

Aufgabe 22
Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms fünften Grades mit reellen Koeffizienten,

$$p(z) = a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0\,,$$

welches eine doppelte Nullstellen bei $z = -2$, einfache Nullstellen bei $z = 2$ und $z = 3 + 2i$ besitzt und der Bedingung $p(3) = 3$ genügt.

Aufgabe 23
Berechnen Sie die Werte des Polynoms

$$q(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x - 12$$

an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ und schreiben Sie das Polynom als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 24
Stellen Sie die Summe folgender harmonischer Schwingungen $u_i(t)$ in der Form

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

dar.

a) Gegeben sei

$$u_1(t) = \sin(\pi t)\,,\ u_2(t) = 2\sin(\pi t + \frac{5\pi}{6})\,.$$

b) Gegeben sei

$$u_1(t) = \sin t\,,\ u_2(t) = -\cos t\,.$$

Aufgabe 25
Gegeben sind die Schwingungen

$$u_1(t) = 3\cos(2t)\,,\ u_2(t) = \sqrt{3}\sin(2t + \frac{\pi}{6})\,,\ u_3(t) = \sqrt{3}\sin(2t + \frac{11}{6}\pi)\,.$$

Berechnen Sie die Überlagerung $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$ mit Hilfe komplexer Rechnung und geben Sie Ihr Ergebnis in der folgenden Form an:

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

wobei $A > 0$, ω und φ explizit anzugeben sind.

2 Differentialrechnung von Funktionen einer und mehrerer reeller Veränderlichen

2.1 Differentialrechnung von Funktionen einer Variablen

2.1.1 Der Differentialquotient

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es existiere eine Folge $(\xi_n) \subset D\backslash\{x\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x$.

f heißt in einem Punkt $x \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{\xi\to x \\ \xi\in D\backslash\{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Dieser Grenzwert $f'(x)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkte x.

Die Funktion f heißt *differenzierbar in* D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Anmerkung: Der Definition liegt der Begriff des Grenzwertes bei Funktionen zu Grunde. Der Grenzwert von

$$g(\xi) := \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert *nicht*, wenn die Folge $g(\xi_n)$ divergiert, d. h., wenn ihr Wert von der Wahl der Folge $(\xi_n)_n \in \mathbb{N}$ abhängt oder bestimmt divergiert.

Der Differenzenquotient

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ des Graphen der Funktion f.

Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\xi \to x$, so geht bei diesem Grenzübergang die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ über.

Statt $f'(x)$ ist auch die Schreibweise $\dfrac{df(x)}{dx}$ üblich.

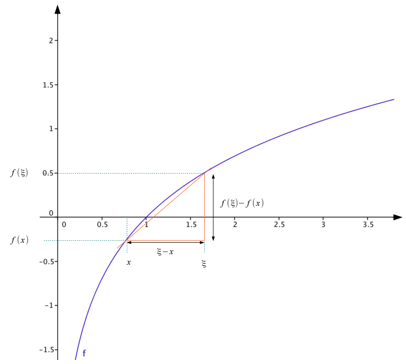


Abbildung 2.1 Die Steigung der Sekante

Beispiele zur Berechnung der Ableitung

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

- Sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}\,.$$

  Da

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

  erhalten wir

$$f'(x) = \exp(x)\,.$$

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = \sin x$. Dann gilt

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

  $$= \left(\lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right).$$

  Da die Funktion $\cos$ stetig ist, erhalten wir

  $$\lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x\,.$$

  Weiterhin gilt

  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

  Das ergibt schließlich

  $$f'(x) = \cos x\,.$$

Die Betragsfunktion

$$abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

ist stetig, jedoch nicht differenzierbar.

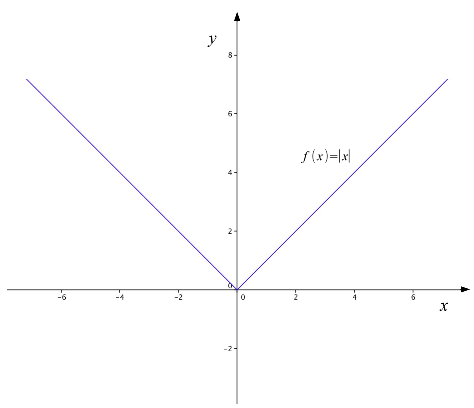


Abbildung 2.2 Die Betragsfunktion

Beweis: Die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$h_n := (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert gegen Null. Für

$$q_n := \frac{abs(0+h_n) - abs(0)}{h_n}$$

gilt

$$q_n = \frac{\frac{1}{n} - 0}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n \,.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$ nicht existiert, ist die Funktion abs im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Wie bei der rechtsseitigen und linksseitigen Stetigkeit, lassen sich auch entsprechende Differentialquotienten einführen.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f im Punkt x *von rechts differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'_+(x) := \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert. Die Funktion f heißt im Punkt x *von links differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'_-(x) := \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert.

Beispiel: Die Funktion abs ist im Nullpunkt zwar nicht differenzierbar, jedoch sowohl von rechts als auch von links differenzierbar, wobei

$$abs'_+(0) = +1 \quad \text{und} \quad abs'_-(0) = -1 \,.$$

Während aus der Stetigkeit einer Funktion nicht deren Differenzierbarkeit folgt, impliziert jedoch umgekehrt die Differenzierbarkeit einer Funktion deren Stetigkeit.

Satz: Ist die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar, so ist sie in x auch stetig.

Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt in $x \in D$ *stetig differenzierbar*, wenn sie in x differenzierbar und der Differentialquotient f' in x stetig ist.

2.1.2 Ableitungsregeln

Produktregel

Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in $x \in D$ differenzierbar, und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Quotientenregel

Ist $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in D$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in $x \in D$ differenzierbar und es gilt

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Beispiel

Für die Funktion

$$\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \tan x$$

erhalten wir

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Ferner sei

$$f : D \to \mathbb{R}$$

eine stetige und streng monotone Funktion und

$$\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}\,, \ \text{ mit } D^* = f(D)\,,$$

deren Umkehrfunktion.

Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))} \,.$$

Beispiel

Die Funktion $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \,.$$

Kettenregel

Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Funktion f sei im Punkt $x \in D$ und g im Punkt $f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

im Punkt $x \in D$ differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \,.$$

Beispiel

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a \,.$$

Mit $x^a = \exp(a \ln x)$ und der Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{dx^a}{dx} = exp'(a\ \ln x)\frac{d}{dx}(a\ \ln x) = \exp(a \ln x)\frac{a}{x} = a\, x^{a-1} \,.$$

Ableitungen höherer Ordnung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $D \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ und $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar. Demnach existiert der Grenzwert $(f')'(x)$. Die Ableitung $(f')'(x)$ wird als *zweite Ableitung* von f in x bezeichnet. Gebräuchlich ist die Schreibweise

$$f''(x) := (f')'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) \,.$$

Allgemein lassen sich so k-te Ableitungen einführen.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar im Punkt $x \in D$, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass f in $D \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ $(k-1)$-mal differenzierbar und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x differenzierbar ist. Gebräuchlich ist die Schreibweise

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}f(x)}{d^{k-1}x}\right) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\,.$$

Ableitungen einiger Funktionen

Die Ableitung der konstanten Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = c$$

ist

$$f'(x) = 0\,.$$

Die Ableitung der Potenzfunktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = x^a, \text{ mit } a \in \mathbb{R}\,,$$

ist

$$f'(x) = a\,x^{a-1}.$$

Trigonometrische Funktionen

Die Ableitung der $\sin$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \sin x$$

ist

$$f'(x) = \cos x\,.$$

Die Ableitung der $\cos$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \cos x$$

ist

$$f'(x) = -\sin x\,.$$

Die Ableitung der $\tan$-Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \tan x$$

ist

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Die Ableitung der $\cot$-Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \cot x$$

ist

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Exponentialfunktionen

Die Ableitung der $\exp$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = e^x$$

ist

$$f'(x) = e^x\,.$$

Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Die Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis a

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = a^x$$

ist

$$f'(x) = a^x \cdot (\ln a)\,.$$

Hyperbelfunktionen

Die Ableitung der $\sinh$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \sinh x$$

ist

$$f'(x) = \cosh x\,.$$

Die Ableitung der $\cos$-Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \cosh x$$

ist

$$f'(x) = \sinh x\,.$$

2.1.3 Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt in $x \in D$ ein *lokales Maximum (Minimum)*, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \geq f(\xi) \text{ (bzw. } f(x) \leq f(\xi)) \quad \text{für alle } \xi \text{ mit } |x - \xi| < \epsilon \,.$$

Dieser Extremwert wird als *isoliertes lokales Maximum (Minimum)* bezeichnet, wenn $f(x) \neq f(\xi)$ in einer beliebig kleinen Umgebung von ξ ist.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitze in D ein *lokales Extremum* und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Der *Satz von Rolle* besagt, dass beispielsweise zwischen zwei Nullstellen einer Funktion eine Nullstelle der Ableitung liegt.

Satz von Rolle: Sei $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Eine Folgerung des *Satzes von Rolle* ist der folgende Mittelwertsatz.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \,.$$

Das bedeutet, dass die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle $(\xi, f(\xi))$ mit $\xi \in (a, b)$ ist.

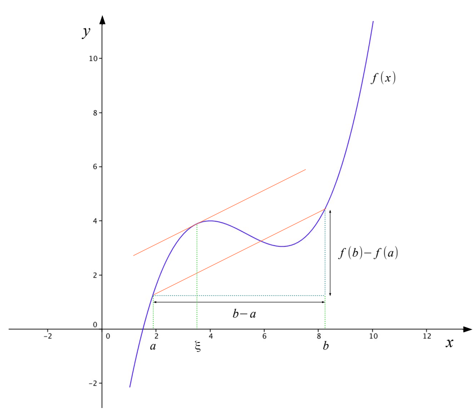


Abbildung 2.3 Die Sekantensteigung und $f'(\xi)$

Mit Hilfe der Ableitung lassen sich die Monotoniebereiche und damit die Extrema bestimmen.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Gilt

- $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ (streng) monoton wachsend,
- $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ (streng) monoton fallend.

Beispiel: Monotoniebereiche und Extremwerte

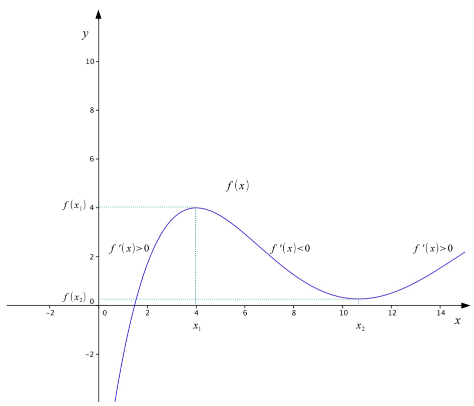


Abbildung 2.4 Monotoniebereiche und Extremwerte

Eine hinreichende Bedingung für ein isoliertes lokales Extremum bietet der folgende Satz:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist. Gilt

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ (bzw. } f''(x) < 0) ,$$

so besitzt f in x ein *isoliertes lokales Minimum* (bzw. *Maximum*).

2.1.4 Approximation durch affin-lineare Funktionen

Die Differenzierbarkeit einer Funktionen kann auch durch die Approximierbarkeit mittels affin-linearer Funktionen ausgedrückt werden.

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Punkt, der Grenzwert mindestens einer Punktfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D\backslash\{a\}$ ist. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt a differenzierbar, wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x) \quad \text{für } x \in D\,,$$

wobei φ eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D\backslash\{a\}}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$$

ist. In diesem Fall gilt $c = f'(a)$. Der Graph unserer affin-linearen Funktion

$$L(x) = f(a) + c(x-a)$$

ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.

Beispiel

Approximation der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) = \sin x$$

in Umgebung des Punktes $a = 0$.

Wir erhalten

x	0,1	0,2	0,3	0,4
$\sin x$	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942

Approximation einiger Funktionen in der Umgebung von $a = 0$

Es gilt

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha\, x\,, \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$\ln(1+x) \approx x.$$

2.2 Taylor-Reihen

Wie wir gesehen haben, kann der Funktionswert einer differenzierbaren Funktion f in der Umgebung einer Stelle a durch

$$f(a) + (x-a)f'(a)$$

näherungsweise bestimmt werden.

Da die Berücksichtigung höherer Ableitungen zu einer verbesserten Approximation von ganzrationalen Funktionen führen kann, stellt sich allgemein die Frage, wann sich Funktionen, zumindest lokal, durch Polynome approximieren lassen.
Eine ganzrationale Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,,$$

lässt sich auch folgendermaßen schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \,.$$

Ersetzen wir hierbei den Punkt 0 durch den Punkt a, so erhalten wir entsprechend

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \,.$$

Taylorsche Formel: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, x \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x) \,,$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt \,.$$

Die *Lagrangesche Form* dieses Restgliedes $R_{n+1}(x)$ lautet:

Es existiert ein $\xi \in [a, x]$ bzw. $\xi \in [x, a]$, so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung lässt sich folgender Satz beweisen:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \eta(x)(x-a)^n\,,$$

wobei $\eta : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$$

ist.

Definition

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$.
  Dann heißt

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt a.

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt a.

Anmerkungen

- Der Konvergenzradius einer Taylor-Reihe ist nicht notwendigerweise positiv.
- Auch wenn die Taylor-Reihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.
- Für $x \in I$ konvergiert die Taylor-Reihe von $f(x)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $R_{n+1}(x)$ gegen 0 konvergiert.

Beispiele

(1) Wir entwickeln die Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{1+x}\,,$$

für den Entwicklungspunkt $a = 0$, in erster Ordnung.

Es gilt

$$f(0) = 1\,, f'(0) = \left.\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}\,.$$

Demnach erhalten wir

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \eta(x)x \;\text{ mit } \lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$$

(2) Die *Exponentialreihe*

Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist definiert als Exponentialreihe, so dass

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Demnach ist die Exponentialreihe die Taylor-Reihe von $\exp$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$.

Zur Konvergenz der Taylor-Reihe für $\exp(x)$

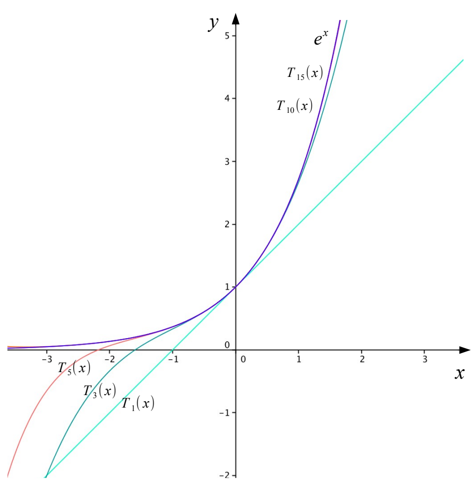


Abbildung 2.5 Approximation von exp durch Taylor-Polynome T_n der Ordnung $n = 1, 3, 5, 10, 15$

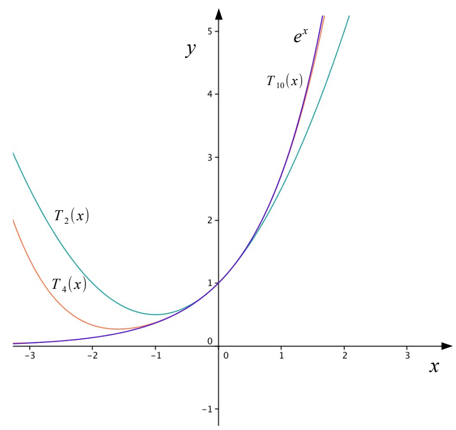


Abbildung 2.6 Approximation von exp durch Taylor-Polynome T_n der Ordnung $n = 2, 4, 10$

(3) Die Taylor-Reihen von Sinus und Cosinus

Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ sind gegeben durch

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \, .$$

Zur Konvergenz der Taylor-Reihe für $\sin(x)$

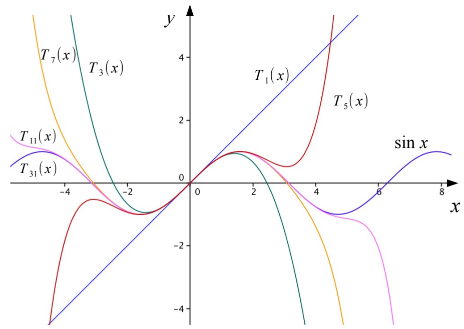


Abbildung 2.7 Approximation von sin durch einige Taylor-Polynome T_n

(4) Die *Logarithmusreihe*

Sei $-1 < x \leq +1$. Dann gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,.$$

(5) Die *Arcus-Tangens-Reihe*

Sei $|x| \leq 1$. Dann gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

(6) Die *Binomische Reihe*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Dann gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\,,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha-k+1}{k}\,.$$

2.3 Differentialrechnung von Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen

Funktionen mehrere Variablen treten in der Physik und Chemie sehr häufig auf. Beispielsweise lassen sich

- die Zustandsgleichung idealer Gase

$$pV = nRT$$

- und das Ohmsche Gesetz

$$R = \frac{U}{I}$$

als Funktionen mehrerer Variablen, wie $p(n, V, T)$ oder $U(R, I)$, betrachten.

Dabei wird der Definitionsbereich oft stärker als mathematisch notwendig eingeschränkt, da durch Naturgesetze zusätzliche Restriktionen gegeben sein können. So lässt sich für den Druck $p = p(V, T)$ eines idealen Gases als Definitionsbereich beispielsweise

$$D_p = \{(V, T) \in \mathbb{R}^2 \,|\, T \geq 0, V > 0\}$$

wählen, wenn wir n als konstant voraussetzen.

Der Definitionsbereich D_p lässt sich dann folgendermaßen veranschaulichen

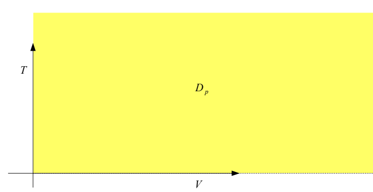


Abbildung 2.8 D_p für ein ideales Gas bei $n = const.$

Der Definitionsbereich einer Funktion mit n reellen Variablen ist eine Punktmenge im $\mathbb{R}^n$. Bei zwei Variablen kann der Definitionsbereich beispielsweise

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

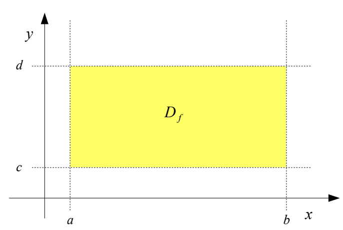


Abbildung 2.9 Rechtecksfläche

oder

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2\}$$

sein.

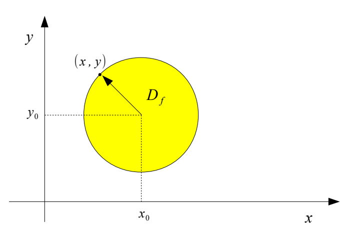


Abbildung 2.10 Kreisfläche

Geometrisch lassen sich Gleichungen wie

$$x + y + z = b \text{ mit } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ,$$

zu festem $b \in \mathbb{R}$, als Ebenen im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Ebene, wenn es zu $b \in \mathbb{R}$ Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2, a_3) \ne (0, 0, 0)$ gibt, so dass

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

gilt. Da nicht alle Koeffizienten der Ebenengleichung verschwinden, existiert auch eine Darstellung der Form

$$z = z(x, y)\,.$$

Jedoch müssen Funktionen $f(x, y)$ nicht linear von den Variablen x und y abhängen. Allgemeiner betrachten wir Abbildungen f von Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, d. h.

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \ \ (x, y) \mapsto f(x, y)\,.$$

Der *Graph* von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \,|\, z = f(x, y)\}\,.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \ \ (x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

für $D = [-10, 10] \times [-10, 10]$.

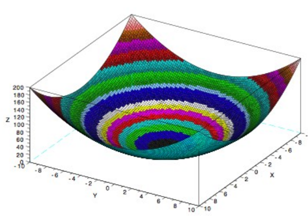


Abbildung 2.11 Graph von $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Rotationsparaboloid)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^3 - y^3$$

für $D = [-3, 3] \times [-3, 3]$.

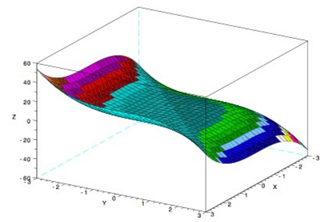


Abbildung 2.12 Graph von $f(x, y) = x^3 - y^3$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich auch durch die Schar $N_f(c)$, $c \in \mathbb{R}$, ihrer *Höhenlinien*

$$N_f(c) := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\} \subset \mathbb{R}^2$$

beschreiben.

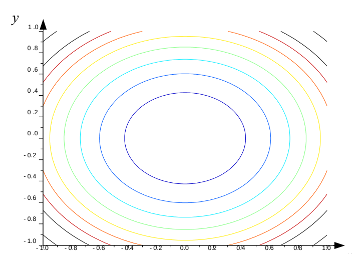


Abbildung 2.13 Höhenlinien von $f(x, y) = x^2 + y^2$

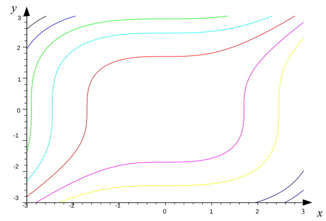


Abbildung 2.14 Höhenlinien von $f(x, y) = x^3 - y^3$

2.3.1 Partielle Ableitungen

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : U \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Ferner sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)\,,$$

wobei nur an der i-ten Stelle eine 1, sonst aber nur 0-Einträge auftreten. Die Funktion f heißt im Punkt $x \in U$ *partiell differenzierbar* bezüglich der i-ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

existiert, wobei $h \in \mathbb{R}^*$ mit $x + he_i \in U$ ist.

Statt $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ schreiben wir auch $\partial_{x_i} f(x)$.
Nehmen wir an, dass für $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ nur eine Koordinate variabel ist, die anderen $n - 1$ Koordinaten aber fest, so erhalten wir Funktionen

$$\xi \mapsto f_i(\xi) := f(x_1, ..., x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, ..., x_n)\,.$$

Die partielle Ableitung der i-ten Koordinatenrichtung lässt sich dann als gewöhnliche Ableitung von $f_i(\xi)$ formulieren. Demnach gilt

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f_i'(x_i)$$

und wir können unsere Ergebnisse und Definitionen der Differentialrechnung einer reellen Variablen nutzen.

Beispiele

- Für die partielle Ableitung von

  $$f(x, y) = x + 2xy$$

  nach x erhalten wir

  $$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 + 2y$$

  und für die partielle Ableitung nach y

  $$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x\,.$$

- Für die partielle Ableitung von

  $$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + e^{xy}$$

  nach x erhalten wir

  $$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x + y\, e^{xy}$$

  und für die partielle Ableitung nach y

  $$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x\, e^{xy}\,.$$

Höhere Ableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : U \to \mathbb{R}$$

eine partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}\,, \quad 1 \leq i \leq n\,,$$

partiell differenzierbar, so heißt f *zweimal partiell differenzierbar*. Entsprechend wird der Begriff k*-mal partiell differenzierbar* erklärt.

Eine übliche Schreibweise für die Ableitungen zweiter Ordnung von f ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und, falls $i = j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

Beispiel

Für die Funktion

$$f(x, y) = \cos x \cdot \sin y$$

erhalten wir für die Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\sin x \cdot \sin y\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cos x \cdot \cos y$$

und für die Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\cos x \cdot \sin y\,, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -\sin x \cdot \cos y$$

und

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = -\sin x \cdot \cos y\,, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\cos x \cdot \sin y\,.$$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn sie k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $a \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n\,.$$

Anmerkung: Die Eigenschaft

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

können wir auch für das vorangegangene Beispiel nutzen.

2.3.2 Approximation durch affin-lineare Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die im Punkt $(x_0, y_0) \in U$ differenzierbar sei. Dann lässt sich f durch affin-lineare Funktionen

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

approximieren.

Im Falle $n = 1$ haben wir die Funktion durch die Geradengleichung der Tangente approximiert. Hier gehen wir entsprechend vor. Statt der Geradengleichung erhalten wir eine Ebenengleichung.

Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ***Ebene***, wenn es $v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt, wobei w_1 und w_2 linear unabhängig sind und

$$A = \{u \in \mathbb{R}^n \,|\, u = v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \;\text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

gilt. Kürzer schreiben wir hierfür

$$A = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2 \,.$$

Tangentialebene

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine in (x_0, y_0) stetig partiell differenzierbare Funktion.

Wir betrachten die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkte P mit den Koordinaten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$(1, 0, \partial_x f(x_0, y_0)) \text{ und } (0, 1, \partial_y f(x_0, y_0))$$

sind Elemente dieser Tangentialebene.

Daher erhalten wir als *Parameterdarstellung* dieser Ebene

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(1, 0, \partial_x f(x_0, y_0)) + \mu(0, 1, \partial_y f(x_0, y_0)) \,,$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

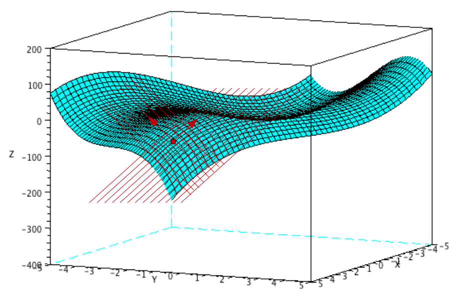


Abbildung 2.15 Tangentialebene

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Ebene, so wird ein $s \in \mathbb{R}^n$ als *orthogonal* zu A, oder als *Normalenvektor* von A, bezeichnet, wenn für alle $v_1, v_2 \in A$ gilt

$$\langle s, v_1 - v_2 \rangle = 0\,.$$

Ist $A = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$, so ist s orthogonal zu A genau dann, wenn
$s \perp w_1$ und $s \perp w_2$ ist.

Der Vektor

$$\vec{n} := \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = (-\partial_x f(x_0, y_0), -\partial_y f(x_0, y_0), 1)$$

ist orthogonal zu unserer Tangentialebene.

Da

$$\langle \vec{n}, ((x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))) \rangle = 0$$

gilt, erhalten wir

$$n_x\,(x - x_0) + n_y\,(y - y_0) + n_z\,(z - z_0) = 0\,,$$

wobei $z_0 := f(x_0, y_0)$, und als weitere Darstellung der Tangentialebene in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\,.$$

Anmerkung: Letztere Darstellung ergibt sich auch unmittelbar aus obiger Parameterdarstellung.

Beispiel

Mit Hilfe unserer Approximation sollen Funktionswerte von

$$z = f(x,y) = \sqrt{x} \cdot y^2$$

in der Umgebung des Punktes $P(1,2)$ berechnet werden.

Es gilt $f(1,2) = 4$ und

$$z - 4 = (\frac{y^2}{2\sqrt{x}})_{(1,2)} \triangle x + (\sqrt{x} \cdot 2y)_{(1,2)} \triangle y = 2 \triangle x + 4 \triangle y \,,$$

mit $\triangle x := x - x_0$ und $\triangle y := y - y_0$.

Für $\triangle x = -0,05$ und $\triangle y = 0,06$ erhalten wir nach dieser Approximation

$$f(0,95\,,\,2,06) = 4 - 2 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,06 = 4,140\,.$$

Setzen wir $x = 0,95$ und $y = 2,06$ stattdessen direkt in $f(x,y)$ ein, so erhalten wir $f(0,95\,,\,2,06) = 4,136$.

Fehlerrechnung

Um zu bestimmen, wie sich Fehler von Messungen in einer Meßgröße niederschlagen, betrachten wir die jeweilige funktionale Abhängigkeit und bestimmen neben dem resultierenden Mittelwert auch die resultierende Abweichung der Meßgröße im Rahmen einer linearen Approximation.

Dabei nehmen wir an, dass die Messgröße

$$f : U \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\,,$$

mit $U \subset \mathbb{R}^n$, von $x = (x_1, ..., x_n)$ abhängt. Werte der Variablen x_i werden durch eine Messung bestimmt. Dabei treten Messfehler auf, so dass wir statt x_i die Größe $x_{i0} \pm \triangle x_i$ betrachten.

Die Mittelwerte x_{i0} der Größen x_i legen einen Wert für die Messgröße $f(x)$ fest. Wie sich dabei die Fehler $\triangle x_i$, im Falle $\triangle x_i \ll x_i$ und unkorrelierte Messfehlern, fortpflanzen, zeigen wir nun.

Für $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ können wir, bei kleinen Abweichungen $\triangle x_i$, die Näherung

$$\triangle z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\triangle x_i\,,$$

für den Wert $f(x) - f(x_0)$, verwenden. Hier schreiben wir x_0 für $(x_{10}, ..., x_{n0})$.

Als *maximalen absoluten Fehler* $\triangle z_{max}$ definieren wir

$$\triangle z_{max} := \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right| \; |\triangle x_i|\,.$$

Damit steht uns ein einfaches *Fehlerfortpflanzungsgesetz* zur Verfügung.

Beispiele

- Nach der *Zustandsgleichung für ideale Gase,*

  $$pV = nRT\,,$$

  lässt sich beispielsweise der Druck p des idealen Gases als Funktion $p = p(n, V, T)$ schreiben.

  Nach unserer Näherung erhalten wir für $\triangle p$

  $$\triangle p = \frac{\partial p}{\partial V}\triangle V + \frac{\partial p}{\partial T}\triangle T + \frac{\partial p}{\partial n}\triangle n\,.$$

  Mit

  $$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}\,,\quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{RT}{V}$$

  und $p_0 = p(n_0, V_0, T_0)$ ergibt sich für den maximalen relativen Fehler

  $$\frac{\triangle p_{max}}{p_0} = \left(\frac{n_0RT_0}{V_0}\right)^{-1}\left(\frac{n_0RT_0}{V_0^2}|\triangle V| + \frac{n_0R}{V_0}|\triangle T| + \frac{RT_0}{V_0}|\triangle n|\right)\,.$$

  Demnach gilt

  $$\frac{\triangle p_{max}}{p_0} = \frac{|\triangle V|}{V_0} + \frac{|\triangle T|}{T_0} + \frac{|\triangle n|}{n_0}\,.$$

  Für

  $$\frac{|\triangle V|}{V_0} = \frac{|\triangle T|}{T_0} = \frac{|\triangle n|}{n_0} = 2\%$$

  erhalten wir somit

  $$\frac{\triangle p_{max}}{p_0} = 6\%\,.$$

- Für den Ohmschen Widerstand gilt

  $$R = \frac{U}{I}\,.$$

  Hier erfolgt die Messung des Widerstandes R anhand einer Messung der Spannung U und der Stromstärke I.

  Um den maximalen relativen Fehler von $R = R(U, I)$ abzuschätzen, nutzen wir die Beziehung

  $$\frac{\triangle R_{max}}{R_0} = \left|\frac{\triangle U}{U_0}\right| + \left|\frac{\triangle I}{I_0}\right|\,.$$

  Somit erhalten wir für $I = (10 \pm 0,3)\,A$ und $U = (220 \pm 2)\,V$

  $$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = 22,0\,\Omega \quad \text{und} \quad \frac{\triangle R_{max}}{R_0} \approx 4\%\,.$$

2.3.3 Lokale Extrema im $\mathbb{R}^2$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ein Punkt $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in U$ heißt *lokales Extremum*, oder genauer *lokales Maximum* oder *lokales Minimum* von f, falls es eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so dass,

- im Falle eines lokalen Maximums,

  $$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in V ,$$

- und im Falle eines lokalen Minimums,

  $$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in V ,$$

  gilt.

Sofern zusätzlich $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ gilt, so wird das jeweilige lokale Extremum als *isoliert* bezeichnet.

Der Ausdruck

$$grad\, f(x_1, x_2) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right)$$

heißt *Gradient*. Der Vektor $grad\, f(x_1, x_2)$ besteht hier aus zwei Komponenten und wir können statt $grad\, f(x_1, x_2) = 0$ auch

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

schreiben.

Einen Punkt, in dem der Gradient verschwindet, bezeichnen wir als *kritischen Punkt*.

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Als *Hesse-Matrix* von f im Punkte $x = (x_1, x_2) \in U$ wird der folgende Term bezeichnet:

$$(H_f)(x_1, x_2) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_m}(x_1, x_2) \right)_{\substack{1 \leq l \leq 2 \\ 1 \leq m \leq 2}} .$$

Für die Formulierung der Hesse-Matrix $H_f(x_1, x_2)$ sind einige Abkürzungen sinnvoll:

$$a_{11} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)\,, \quad a_{12} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)\,,$$
$$a_{21} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)\,, \quad a_{22} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,.$$

Mit dieser Schreibweise erhalten wir

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\,.$$

Wenn f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion ist, gilt außerdem

$$a_{21} = a_{12}\,.$$

Satz: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ferner sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x = (x_1, x_2) \in U$ ein Punkt mit

$$grad\, f(x_1, x_2) = 0\,.$$

- Gilt $\det(H_f(x_1, x_2)) > 0$ und $a_{11} > 0$,
  so hat f in x ein *isoliertes lokales Minimum*.
- Gilt $\det(H_f(x_1, x_2)) > 0$ und $a_{11} < 0$,
  so hat f in x ein *isoliertes lokales Maximum*.
- Gilt $\det(H_f(x_1, x_2)) < 0$,
  so hat f in x kein lokales Extremum.

Im folgenden Abschnitt schreiben wir der Einfachheit halber D statt $\det(H_f(x_1, x_2))$.

Anmerkung

Für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit beispielsweise $f(x, y) = x^2 + y^4$ oder $f(x, y) = x^2 + y^3$, lassen sich unsere Kriterien nicht anwenden.

Für beide Funktionen gilt

$$grad\, f(0, 0) = (0, 0)$$

und

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Während jedoch die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^4$ im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum besitzt, hat $f(x, y) = x^2 + y^3$ dort kein lokales Extremum.

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2 \,.$$

Für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung erhalten wir

$$\partial_x f(x, y) = 2x - 2 \,, \quad \partial_y f(x, y) = 2y$$

und

$$\partial_x^2 f(x, y) = 2, \; \partial_y \partial_x f(x, y) = 0, \; \partial_y^2 f(x, y) = 2 \,.$$

Die Bedingung

$$\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$$

für einen kritischen Punkt impliziert, dass

$$2x - 2 = 0 \;\text{ und }\; 2y = 0 \,.$$

Daher ist $P(1, 0)$ der einzige kritische Punkt. Da außerdem für P

$$D > 0 \;\text{ und }\; a_{11} = \partial_x^2 f(x, y) = 2 > 0$$

gilt, besitzt f in P ein lokales Minimum.

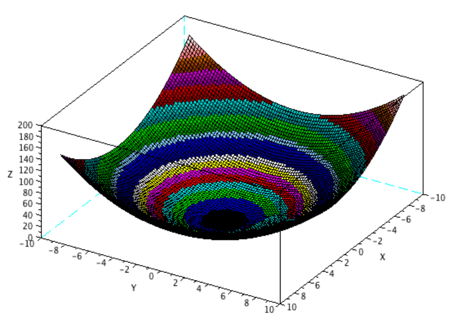


Abbildung 2.16 Graph von $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$

- Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

  $$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

  verschwindet der Gradient lediglich bei $(x, y) = (0, 0)$, da

  $$\partial_x f(x, y) = 2x \text{ und } \partial_y f(x, y) = -2y\,.$$

  Ferner gilt

  $$\partial_x^2 f(x, y) = 2,\ \partial_y \partial_x f(x, y) = 0,\ \partial_y^2 f(x, y) = -2\,.$$

  Daher gilt $D < 0$ und f besitzt im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Extremum. Der Graph von f ist eine sog. Sattelfläche.

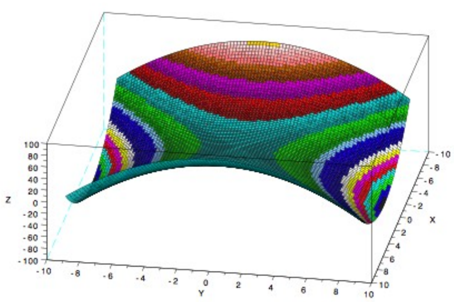


Abbildung 2.17 Graph von $f(x, y) = x^2 - y^2$

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

  $$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3\,.$$

  Für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung erhalten wir

  $$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - 3y\,, \quad \partial_y f(x, y) = -3x + 3y^2$$

  und

  $$\partial_x^2 f(x, y) = 6x,\ \partial_y \partial_x f(x, y) = -3,\ \partial_y^2 f(x, y) = 6y\,.$$

  Die Bedingung

  $$\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$$

für einen kritischen Punkt impliziert, dass

$$y = x^2 \text{ und } x = y^2 .$$

Betrachten wir $x = x^4$, so erhalten wir, wegen $x(1 - x^3) = 0$, die Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$ und damit die kritischen Punkte $P(0, 0)$ und $Q(1, 1)$.

Da im Punkt P

$$D = -9 < 0$$

gilt, hat die Funktion f in P kein lokales Extremum.

Im Punkt Q gilt

$$D = 27 > 0 \text{ und } a_{11} = \partial_x^2 f(x, y) = 6 > 0 ,$$

so dass dort ein lokales Minimum vorliegt.

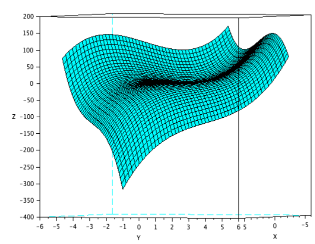


Abbildung 2.18 Graph von $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

2.4 Übungsaufgaben: Differentialrechnung

Aufgabe 1
Differenzieren Sie folgende Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x)$$

mit

a) $f(x) = 5x^6 + 3x^4 - x\,,$ b) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 3)\,,$ c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\,,$

d) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^{-2} + 2\,,$ e) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}\,,$ f) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - 2x}\,,$

g) $f(x) = \dfrac{4}{(1 - 2x)^2}\,,$ h) $f(x) = (\dfrac{1}{x} + \cos x)^2\,,$ i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \tan x}\,,$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}\,,$ k) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(1 + x)}\,,$ l) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\,,$

m) $f(x) = x\exp(-x)\,,$ n) $f(x) = x\exp(-x^2)\,,$ o) $f(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{2})\,.$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für

a) die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(\frac{x}{2})\,,$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$,

b) die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cosh x\,,$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$,

c) die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x\,,$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie das Taylor-Polynom neunter Ordnung für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,,$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und vergleichen Sie den damit erhaltenen Näherungswert für $f(x = 0,2)$ mit dem exakten Wert.

Aufgabe 4
Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels Taylor-Reihen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\exp x - 1}\,,$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1+x))^2}{\cos x - 1}\,,$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x})\,,$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\arcsin x}\,,$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \exp x}{1 - \exp x}\,,$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x\ln(1+x)}{\sin(x^3)}\,.$

Aufgabe 5
Skizzieren Sie folgende Punktmengen D:

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le (x-2)^2 + (y+1)^2 \le 9\}\,,$

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1\}\,,$

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x < 1 \wedge -x < y < 2x\}\,.$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,,\ \ (x,y) \mapsto f(x,y)$$

mit

a) $f(x,y) = \sqrt{y - 2x}\,,$ b) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)(9-y^2)}\,,$ c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}\,,$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,,$ e) $f(x,y) = \sqrt{2x - 2y}\,.$

und skizzieren Sie jeweils die Punktmenge D.

Aufgabe 7
Beschreiben Sie die Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$x^2 + y^2 = 9\,.$$

Aufgabe 8
Beschreiben Sie die Höhenlinien folgender Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

jeweils als Kurven, die sich als Kegelschnitte definieren lassen. Es sei

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1\,,$ b) $f(x, y) = x^2 - y^2\,,$

c) $f(x, y) = xy\,,$ d) $f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + 2y^2\,.$

Aufgabe 9
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung folgender Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

mit

a) $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 2x\,,$ b) $f(x, y) = (3x - 4y)^4\,,$ c) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}\,,$

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}\,,$ e) $f(x, y) = \exp(xy)\,.$

Aufgabe 10
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)\,,$

b) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}\,,$

c) $f(x, y) = \cos(3xy)\,,$

d) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}\,,$

e) $f(x, y) = e^{-x+y} + \ln \dfrac{x}{y}\,.$

Aufgabe 11
Geben Sie jeweils die Koordinatendarstellung der Tangentialebene folgender Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

im Punkt $P(x, y, f(x, y))$ an. Es sei

a) $f(x, y) = x^2 e^{xy}\,, \quad P(1, 0, f(1, 0))\,,$

b) $f(x, y) = \ln(\dfrac{x}{y})\,, \quad P(-2, -5, f(-2, -5))\,.$

Aufgabe 12
Geben Sie jeweils die Parameter- und Koordinatendarstellung der Tangentialebene folgender Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

im Punkt $P(x, y, f(x, y))$ an. Es sei

a) $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 2x\,,\ P(1, 1, f(1, 1)),$

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)\,,\ P(0, 1, f(0, 1)),$

c) $f(x, y) = \sin(x + y)\,,\ P(\pi, -\pi, f(\pi, -\pi))$

d) $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y\,,\ P(\pi, 0, f(\pi, 0)).$

Aufgabe 13
Die Vermessung eines Dreiecks ergab für die Grundseite c und die beiden anliegenden Winkel folgende Werte

$$c = (10 \pm 0,1)\,m\,,\ \alpha = \frac{\pi}{4} \pm 0,005 \text{ und } \beta = \frac{\pi}{4} \pm 0,002\,.$$

Berechnen Sie den maximalen absoluten und relativen Fehler für die Dreiecksfläche A mittels

$$A = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}\,.$$

Aufgabe 14
Die Vermessung eines Dreiecks ergab für die Seiten x und y die Werte

$$x = (150 \pm 0,2)\,m\,,\; y = (200 \pm 0,2)\,m$$

und für den eingeschlossenen Winkel

$$\alpha = 60^\circ \pm 1^\circ\,.$$

Berechnen Sie den maximalen absoluten und relativen Fehler für die Dreiecksfläche A mittels

$$A = \frac{1}{2}xy\sin\alpha\,.$$

Aufgabe 15
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}\,,\quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

mit

a) $f(x, y) = 2(x + 1)^2 + (y + 1)^2\,,$

b) $f(x, y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1\,,$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)\,,$

d) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 3y^3 + 1\,,$

e) $f(x, y) = xy\exp(2 - x - y)\,,$

f) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)\,,$

g) $f(x, y) = \frac{1}{27}\,xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\,.$

3 Integralrechnung

3.1 Das Riemannsche Integral

Das Riemannsche Integral geeigneter Funktionen und Intervalle wird im Rahmen eines Grenzwertprozesses für Treppenfunktionen eingeführt.

Treppenfunktionen

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ und Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\varphi(x) = c_k \text{ für alle } x \in (x_{k-1}, x_k) \text{ mit } 1 \leq k \leq n\,.$$

Die Funktionswerte $\varphi(t_k)$ sind beliebig.

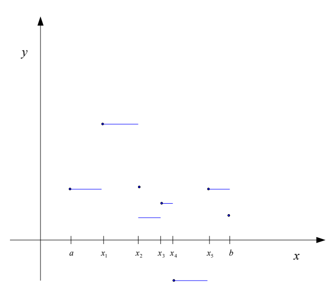


Abbildung 3.1 Treppenfunktion und Unterteilung des Intervalls

Das Integral für Treppenfunktionen

Sei φ eine Treppenfunktion, die hinsichtlich der Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

so definiert ist, dass

$$\varphi\Big|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k \text{ für } k = 1, ..., n\,.$$

Dann wird

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

definiert. Die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $T[a,b]$.

Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann wird das Oberintegral als

$$\int_a^{b\,*} f(x)\,dx := \inf\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f \right\}$$

und das Unterintegral als

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx := \sup\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f \right\}$$

bezeichnet. Dabei heißt eine reelle Zahl

- *Supremum sup*, falls sie die kleinste obere und
- *Infimum inf*, falls sie die größte untere Schranke ist.

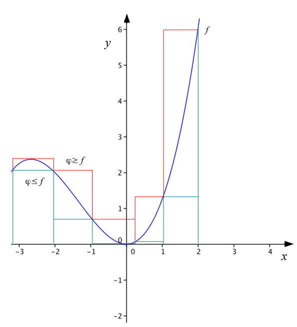


Abbildung 3.2 Treppenfunktionen und Integration

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\int_a^{b\,*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx$$

gilt. Dann wird

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{b\,*} f(x)\,dx$$

gesetzt.

Beispiele

- Treppenfunktionen $\varphi \in T[a,b]$ sind Riemann-integrierbar.
- Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

  ist nicht Riemann-integrierbar, da

$$\int_0^{1^*} f(x)\,dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_{0_*}^{1} f(x)\,dx = 0\,.$$

Im folgenden Abschnitt schreiben wir statt Riemann-integrierbar lediglich integrierbar.

Satz: Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Das lässt sich mit Hilfe der Approximierbarkeit stetiger Funktionen und der Ober- und Unterintegrale durch Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$, mit $\varphi \leq f \leq \psi$, und die jeweiligen Ober- und Untersummen zeigen.

Mit dieser Eigenschaft lässt sich auch der folgende Satz beweisen.

Satz: Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Linearität und Monotonie des Integrals

Satz: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und λf integrierbar und es gilt:

(i) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx,$

(iii) Ist $f \leq g$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Intervallgrenzen

Satz: Sei $a < b < c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. Die Funktion f genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind. Dann gilt

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Definition

- Für identische obere und untere Intervallgrenze a wird

  $$\int_a^a f(x)\,dx := 0$$

  gesetzt.

- Die Integration $\int_a^b f(x)dx$ kann für $b < a$ mittels

  $$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

  behandelt werden.

3.2 Integration und Differentiation

Betrachten wir statt des Integrals

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

einer integrierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, das entsprechende Integral mit einer variablen Integrationsgrenze $x \in (a,b]$, so erhalten wir die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

3.2.1 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Eine differenzierbare Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}$$

heißt *Stammfunktion* einer Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}\,,$$

falls f die Ableitung der Funktion F, d. h.

$$F' = f$$

ist.

Beispiel

Die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}\,,$$

ist Stammfunktion von $f(x) = x^n$.

Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Stamfunktion von f, wenn

$$F(x) - G(x) = c \;\text{ für } x \in I\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, gilt.

Beweis

(i) Sei $F - G = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $G' = (F - c)' = F' = f$.

(ii) Sei G Stammfunktion von f. Demnach gilt $G' = f = F'$ und daher $(F - G)' = 0$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $F - G = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \;\text{ mit } a, b \in I\,.$$

Beweis

Definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt \;\text{ mit } x \in I\,,$$

so ist $F_0 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F_0(a) = 0 \;\text{ und }\; F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Weiterhin gilt, für $h \neq 0$,

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi_h \in [x, x+h]$, sofern $h > 0$, bzw. ein $\xi_h \in [x+h, x]$, sofern $h < 0$, mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(\xi_h)\,.$$

Da

$$\lim_{h\to 0} \xi_h = x$$

gilt und f stetig ist, zeigt sich, mit

$$F_0'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(hf(\xi_h)) = f(x)\,,$$

dass F_0 eine Stammfunktion von f ist.

Eine beliebige Stammfunktion F von f kann sich von F_0 nur durch eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$ unterscheiden. Daher gilt

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt\,.$$

Beispiel

Eine einfache Integration ist bereits erforderlich, soll die entlang eines Weges verrichtete Arbeit berechnet werden, wenn die Kraft in Wegrichtung nicht konstant ist.

Das ist beispielsweise in der Elektrostatik der Fall, wenn wir die Arbeit W berechnen, die bei beliebigen Verschiebungen einer Ladung q im Coulomb-Feld F einer Ladung Q verrichtet wird. Soll sich deren Ort vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 in Feldrichtung verändern, so erhalten wir

$$W_{12} = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})\,.$$

3.2.2 Integrationsmethoden

Substitutionsregel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.$$

Beweis

Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechung erhalten wir daher

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi(t))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.$$

Beispiele zur Substitutionsregel

- Wir erhalten
  $$\int \frac{1}{2+3t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|2+3t| + C\,, \quad \text{wobei } t \neq -\frac{2}{3}\,,$$
  mit Hilfe der Substitution $\varphi(t) := 2+3t$,
- und
  $$2\int t\,e^{t^2}\,dt = e^{t^2} + C$$
  mittels $\varphi(t) := t^2$.

Einige Substitutionen

- Für Integrale der Form $\int f(ax+b)\,dx$, mit $a \neq 0$, erhalten wir
  $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du\,.$$

- Für Integrale der Form $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx$ erhalten wir

  $$\int f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(x))^2 + C\,.$$

  Beispiel: $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$

- Für Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ erhalten wir

  $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,.$$

  Beispiel: $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

- Ist f eine rationale Funktion, so werden Integrale der Form

  $$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \quad \text{beispielsweise mittels} \quad x =: \cos u$$

  umgeformt. Dabei erhalten wir

  $$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx = \int f(\cos u, |\sin u|)\,\sin u\,du\,.$$

  Beispiel: Mit $x =: \cos u$, $0 \le u \le \pi$, erhalten wir

  $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + C\,.$$

- Ist f eine rationale Funktion, so werden Integrale der Form

  $$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx \quad \text{beispielsweise mittels} \quad x =: \cosh u$$

  umgeformt. Dabei erhalten wir

  $$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx = \int f(\cosh u, |\sinh u|)\,\sinh u\,du\,.$$

Partielle Integration

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx\,.$$

Beweis

Nach der Produktregel erhalten wir für die Ableitung von $F := fg$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

und mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b\,.$$

Beispiele zur partiellen Integration

- Für $\int x\, e^{ax}\,dx$ gilt

  $$\int x\, e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cdot x - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}\, e^{ax}(ax-1) + C\,,$$

- für $\int \ln x\,dx$, mit $x > 0$, gilt

  $$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \cdot \ln x - x + C$$

- und für $\int x \arctan(\frac{x}{a})\,dx$ gilt

  $$\begin{aligned}\int x \arctan(\frac{x}{a})\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(\frac{x}{a}) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} \cdot \frac{1}{a}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \arctan(\frac{x}{a}) - \frac{a}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{a^2+x^2}\,dx\,,\end{aligned}$$

  was sich mittels

  $$\frac{x^2}{a^2+x^2} = \frac{x^2+a^2-a^2}{a^2+x^2} = 1 - \frac{a^2}{a^2+x^2} = 1 - \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

  umformen lässt zu

  $$\int x \arctan(\frac{x}{a})\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\arctan(\frac{x}{a}) - \frac{a}{2}x + C\,.$$

Partialbruchzerlegung

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$$

Polynome mit reellen Koeffizienten. Ferner sei $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$. Dann heißt die Funktion

$$r : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion.

Lässt sich r nur mit Nennerpolynomen des Grades $m > 0$ darstellen, so werden die Funktionen r auch als *gebrochenrationale Funktionen* bezeichnet.

Polynomdivision: Seien p und q Polynome und r eine rationale Funktion. Dann gibt es ein Polynom p_0 und ein Polynom p_r, dessen Grad kleiner als der Grad von q ist, so dass

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_0(x) + \frac{p_r(x)}{q(x)} \,.$$

Die rationale Funktion $\frac{p_r(x)}{q(x)}$ wird auch als echt gebrochen bezeichnet. Das ist eine rationale Funktionen, deren Zählerpolynom einen kleineren Grad als deren Nennerpolynom hat.

Sei $\frac{p_r(x)}{q(x)}$ echt gebrochen und $b_m = 1$.
Nach dem Faktorisierungssatz (siehe Kapitel 1.7) lässt sich das Polynom $q(x)$ als Produkt von Faktoren der Form $(x-a)^k$ und $(x^2 + px + q)^l$, mit $p^2 - 4q < 0$, darstellen.

- Zu jedem Faktor der Form $(x-a)^k$ gehören die Brüche

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} \,.$$

- Zu jedem Faktor der Form $(x^2 + px + q)^l$ gehören die Brüche

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + ... + \frac{B_l x + C_l}{(x^2 + px + q)^l} \,.$$

Beispiele

- Um $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ zu berechnen, können wir folgende Partialbruchzerlegung verwenden:

  $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,.$$

  Mittels Koeffizientenvergleich folgt

  $$A = B = \frac{1}{2}\,.$$

  Demnach gilt

  $$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx\right) = \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x-1|) + C$$

  $$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C\,.$$

- Um $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx$ zu berechnen, können wir folgende Partialbruchzerlegung verwenden:

  $$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}\,.$$

  Mittels Koeffizientenvergleich folgt

  $$A = -1,\ B = -1,\ C = 1\,.$$

  Demnach gilt

  $$\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

  $$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + C\,.$$

Beispiele zur Flächenberechnung

- Gesucht ist die Fläche, die der Funktionsgraph von

  $$f : [a, b] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto f(x) = c\,, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

  mit der Abszisse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ einschließt.

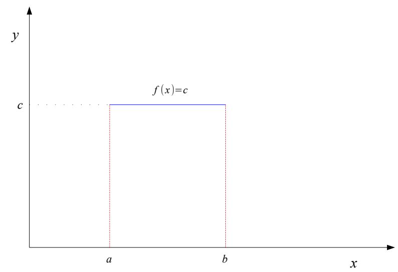


Abbildung 3.3 Flächeninhalt eines Rechtecks

  Wir erhalten

  $$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a)\,.$$

- Gesucht ist die Fläche, die der Funktionsgraph von

  $$f : [0, a] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto f(x) = m\,x\,, \quad \text{mit } m \in \mathbb{R}_+^*\,,$$

  mit der Abszisse und der Geraden $x = a$ einschließt.

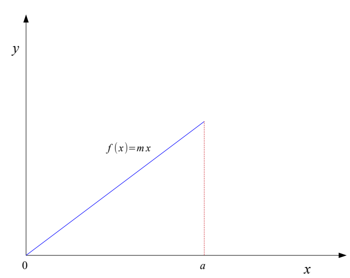


Abbildung 3.4 Flächeninhalt eines Dreiecks

  Wir erhalten

  $$\int_0^a m\,x\,dx = m\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a = \frac{h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}ah\,,$$

  mit $h := f(a)$.

- Der Flächeninhalt eines Kreises $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = r^2\}$ lässt sich mit Hilfe des Integrals

$$\int\limits_a^b \sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,, \quad \text{mit } -r < a < b < r\,,$$

und dieses mittels

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx\,, \quad \text{mit } -1 < a < b < 1\,,$$

bestimmen.

Hier berechnen wir die Fläche eines Halbkreises mit Hilfe des Funktionsgraphen von

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

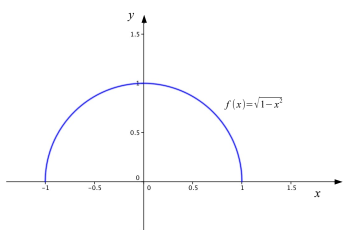


Abbildung 3.5 Flächeninhalt eines Halbkreises

Nach der Substitution $x = \sin t$ und den Definitionen $u := \arcsin a$ und $v := \arcsin b$ folgt

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int\limits_u^v \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int\limits_u^v \cos^2 t\, dt\,.$$

Da

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$$

gilt, können wir

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_u^v (\cos(2t) + 1)\, dt = \frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v$$

schreiben.

Mit

$$\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}$$

erhalten wir

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\Big|_a^b .$$

Da der Term stetig von den Integrationsgrenzen abhängt, folgt hieraus, dass

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

der Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius 1 ist.

3.3 Uneigentliche Integrale

Hier betrachten wir die Fälle, dass

- das Intervall uneigentlich ist,
- der Integrationsbereich eine Singularität der zu integrierenden Funktion enthält.

Definition: Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, b]$, mit $a < b < \infty$, Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent und es wird

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

gesetzt.

Anmerkung: Entsprechend wird verfahren, wenn statt des uneigentlichen Intervalls $[a, \infty)$ die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$ auftreten.

Beispiel

Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx\,, \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \text{ und } s > 1\,,$$

konvergiert, da

$$\int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}}\bigg|_1^b = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{b^{s-1}}\right)$$

und daher

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1}\,.$$

Definition: Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\epsilon, b] \subset (a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

existiert, heißt das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konvergent und es wird

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

gesetzt.

Beispiel

Das Integral

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx\,, \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \text{ und } s < 1\,,$$

konvergiert, da

$$\int\limits_\epsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}(1-\epsilon^{1-s})$$

und daher

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\,.$$

3.4 Kurven und deren Länge

Definition: Eine *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$f : I \to \mathbb{R}^n\,,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein eigentliches oder uneigentliches Intervall ist.

Beispiel

Sei $r, c \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $c \neq 0$. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ct)$$

ist eine *Schraubenlinie*.

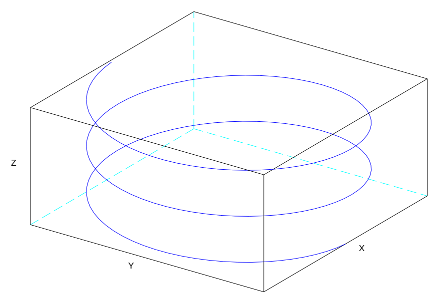


Abbildung 3.6 Schraubenlinie

Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^2$

Die *euklidische Norm* eines Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve. Das Intervall $[a, b]$ wir folgendermaßen unterteilt:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\,.$$

Verbinden wir die Punkte $f(t_{i-1})$ mit $f(t_i)$ für $i = 1, ..., k$ durch Geradenstücke, so erhalten wir einen Polygonzug.

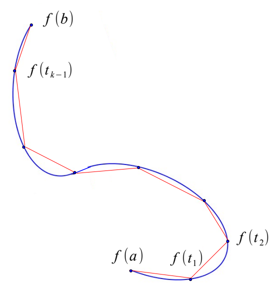


Abbildung 3.7 Polygonzug

Die Länge des Polygonzugs ist gleich

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{(f_x(t_i) - f_x(t_{i-1}))^2 + (f_y(t_i) - f_y(t_{i-1}))^2} \, .$$

Für eine *stetig differenzierbare* Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ existiert eine Folge beliebig feiner Unterteilungen, so dass die zugehörige Länge des Polygonzugs gegen die Länge L der Kurve konvergiert. Für die Länge gilt

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{({f_x}'(t))^2 + ({f_y}'(t))^2} \, dt \, .$$

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann kann der Graph dieser Funktion als Kurve f im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden mit

$$f : I \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto (t, \varphi(t)) \, .$$

In diesem Fall erhalten wir

$$({f_x}'(t))^2 + ({f_y}'(t))^2 = 1 + (\varphi'(t))^2$$

und daher, mit $I = [a, b]$,

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(t))^2} \, dt \, .$$

Anmerkung: Statt t können wir hier selbstverständlich auch x schreiben.

Beispiel

Um die Länge eines Kreises mit Radius r zu bestimmen, betrachten wir den Funktionsgraphen von

$$\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Es gilt

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$$

Demnach beträgt die Länge des Halbkreises

$$L = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r \int\limits_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= r \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = r\ \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = r\pi\,.$$

Wir können einen Kreisbogen auch mit Hilfe von Polarkoordinaten ausdrücken.

Seien $r, \varphi \in \mathbb{R}_+^*$. Durch

$$f : [0, \varphi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto f(t) = r \cdot (\cos t, \sin t)$$

wird ein Kreisbogen beschrieben. Es gilt

$$f'(t) = r \cdot (-\sin t, \cos t)$$

und daher

$$\sqrt{({f_x}'(t))^2 + ({f_y}'(t))^2} = r\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = r\,.$$

Somit erhalten wir für die Bogenlänge

$$L = r \int\limits_{0}^{\varphi} dt = r\varphi\,.$$

Der Umfang eines Kreises ist $2\pi r$.

3.5 Integralrechnung im $\mathbb{R}^2$

Doppelintegrale auf Rechtecken $Q \subset \mathbb{R}^2$ lassen sich als Verallgemeinerung der Integrale für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren.

Sei

$$Q = I_1 \times I_2 \,,$$

wobei $I_k := [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, und

$$f : Q \to \mathbb{R} \,, \; (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion.

Ist $y \in I_2$ fest, so kann die Funktion f hinsichtlich x über das Intervall I_1 integriert werden. Setzen wir

$$F_1(y) := \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \,,$$

so ist

$$F_1 : I_2 \to \mathbb{R}$$

stetig, wie sich zeigen lässt.

Linearität und Monotonie des Integrals

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und λf integrierbar und es gilt:

(i) $\displaystyle\int\limits_Q (f(x, y) + g(x, y))\, dx\, dy = \int\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy + \int\limits_Q g(x, y)\, dx\, dy,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_Q \lambda \cdot f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \cdot \int\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy,$

(iii) Ist $f \leq g$, so gilt $\displaystyle\int\limits_Q f(x, y)\, dx\, dy \leq \int\limits_Q g(x, y)\, dx\, dy$.

Integration über rechteckige Bereiche

Der Integrationsbereich ist hierbei ein Rechteck

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\}\,.$$

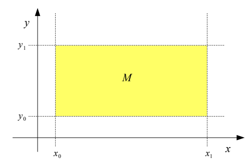


Abbildung 3.8 Rechteck als Integrationsbereich

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\int\limits_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_{y_0}^{y_1} \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Demnach kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

Integration über allgemeinere Bereiche im $\mathbb{R}^2$

Der Integrationsbereich $M \subset \mathbb{R}^2$ kann auch allgemeiner gewählt werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

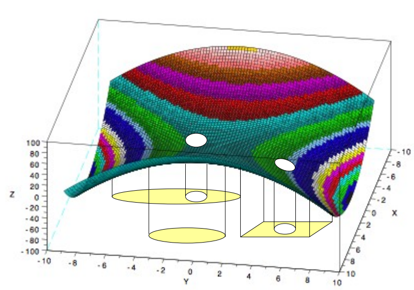


Abbildung 3.9 Ein Integrationsbereich

Ist der Integrationsbereich die Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_0 \le x \le x_1, y_0(x) \le y \le y_1(x)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_0(y) \le x \le x_1(y), y_0 \le y \le y_1\}\,,$$

so erhalten wir für eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_{y_0}^{y_1} \left(\int\limits_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beispiele

- Sei $f : M \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = x\sin(\pi y)$ und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

  Dann gilt

  $$\iint\limits_M x\sin(\pi y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^1 x\sin(\pi y)\,dy \right) dx\,.$$

  Außerdem erhalten wir

  $$\int\limits_0^1 x\sin(\pi y)\,dy = -\frac{x}{\pi}\,\cos(\pi y)\Big|_0^1 = \frac{2x}{\pi}$$

  und

  $$\int\limits_0^2 \frac{2x}{\pi}\,dx = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^2 = \frac{4}{\pi}\,.$$

  Kehren wir die Integrationsreihenfolge um, so ergibt sich

  $$\int\limits_M x\sin(\pi y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 x\sin(\pi y)\,dx \right) dy\,.$$

  Ferner gilt

  $$\int\limits_0^2 x\sin(\pi y)\,dx = \sin(\pi y)\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2\sin(\pi y)$$

  und

  $$\int\limits_0^1 2\sin(\pi y)\,dy = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi y)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi}\,.$$

- Sei $f : M \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = xy^2$ und M das von den Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = -\frac{1}{2}\,x + 1$ berandete Gebiet im ersten Quadranten.

  Es gilt

$$\iint\limits_M xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+1} xy^2\,dy \right) dx\,.$$

  Außerdem erhalten wir

$$\int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+1} xy^2\,dy = x\,\frac{y^3}{3}\bigg|_0^{-\frac{1}{2}x+1} = \frac{x}{3}\left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$$

  und

$$\int\limits_0^2 \left(-\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx = \left(-\frac{1}{24\cdot 5}x^5 + \frac{1}{4\cdot 4}x^4 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 2}x^2\right)\bigg|_0^2 = \frac{1}{15}\,.$$

  Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge berechnen wir

$$\iint\limits_M xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2-2y} xy^2\,dx \right) dy\,.$$

  Es gilt

$$\int\limits_0^{2-2y} xy^2\,dx = y^2\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2-2y} = 2y^2\left(1 - 2y + y^2\right)$$

  und

$$2\int\limits_0^1 \left(y^2 - 2y^3 + y^4\right)\,dy = 2\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{5}y^5\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{15}\,.$$

Transformation auf Polarkoordinaten

Wir erhalten die *(ebenen) Polarkoordinaten* $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ durch die kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mittels

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) .$$

Ist M in folgender Form

$$M := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \,|\, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

gegeben, so können wir die Integration über kartesische Koordinaten vermeiden, indem wir folgende Identität

$$\iint\limits_M f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r, \varphi)\, r\, dr \right) d\varphi$$

nutzen.

Beispiel

Sei M ein Viertelkreis mit Radius $r = 2$ und

$$f : M \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xy\,.$$

Dann erhalten wir

$$\iint\limits_M xy\, dx\, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^2 r^2 \, \sin \varphi \, \cos \varphi \, r\, dr \right) d\varphi\,.$$

Ferner gilt

$$\int\limits_0^2 r^2 \, \sin \varphi \, \cos \varphi \, r\, dr = \sin \varphi \, \cos \varphi \int\limits_0^2 r^3\, dr = \sin \varphi \, \cos \varphi \, \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2$$

$$= 4 \, \sin \varphi \, \cos \varphi = 2 \sin(2\varphi)$$

und

$$2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)\, d\varphi = -\cos(2\varphi)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,.$$

3.6 Übungsaufgaben: Integralrechnung

Aufgabe 1
Berechnen Sie folgende Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx\,.$

Aufgabe 2
Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx\,.$

Aufgabe 3
Berechnen Sie folgende Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx\,,$ d) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+x-1}{x^4+x^2}\,dx\,.$

Aufgabe 4
Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int (3x+4)^2\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \cos(3x+1)\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int x^2\sin(2x)\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int (x^3+x^2-1)e^{2x-4}\,dx\,,$ f) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,,$ i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (e^{2x}-1)\,dx\,,$

j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x}\,dx\,,$ k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\,,$ l) $\displaystyle\int_1^\infty x^n\,dx$, mit $n<-1\,,$

m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\,.$

Aufgabe 5
Berechnen Sie jeweils die Länge folgender Kurven

$$f : I \to \mathbb{R}^2\,, \quad x \mapsto (x, y(x))$$

mit

a) $y(x) = x^2$ und $I = [0,1]\,.$

b) $y(x) = \ln x$ und $I = [\sqrt{3}, \sqrt{8}]\,.$

c) $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ und $I = [0,4]\,.$

Aufgabe 6
Berechnen Sie die Fläche, welche jeweils von den folgenden Kurven eingeschlossen wird. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an:

a) $k_1 \colon y = x^2 - 4\,, \quad k_2 \colon y = -x^2 + 4$

b) $k_1 \colon y = -x^3 + x\,, \quad k_2 \colon y = x^4 - 1$

c) $k_1 \colon y = \sqrt{x+1}\,, \quad k_2 \colon y = \cos x\,, \quad k_3 \colon y = 0$ (im II. Quadranten).

Aufgabe 7
Eine Masse m_1 wird gemäß

$$F(r) = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

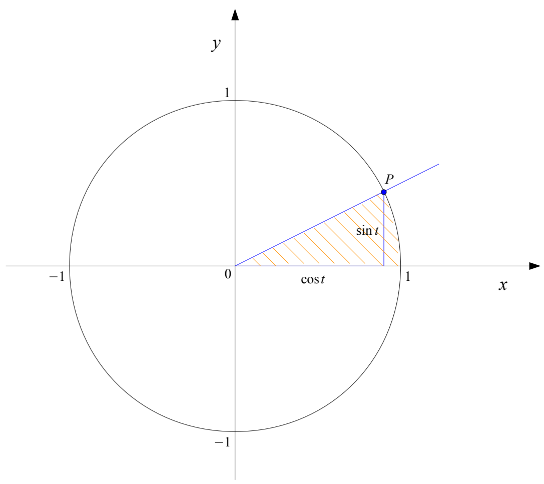
angezogen. Dabei ist $m_2 = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg$ die Erdmasse und $G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$ die Gravitationskonstante.

a) Berechnen Sie die mechanische Arbeit W, die benötigt wird, um $m_1 = 1\,kg$ von der Erdoberfläche $r_0 = 6370\,km$ aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen.

b) Wie hoch ist die Fluchtgeschwindigkeit?

Aufgabe 8
Gegeben ist der Punkt $P(x, y)$ auf dem Einheitskreis

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$



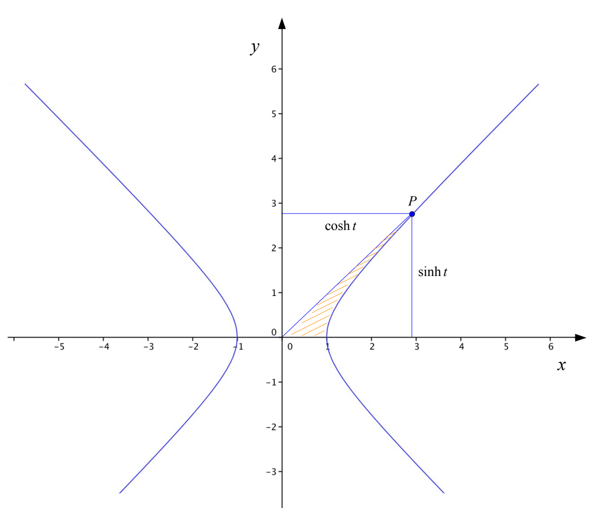
Bezeichnet t den Winkel in Bogenmaß gegen die positive x-Achse, so gilt

$$x = \cos t\,,\ y = \sin t\,, 0 \leq t < 2\pi\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der besprochenen Integrationsmethoden, dass sie schraffierte Sektorfläche $\dfrac{t}{2}$ beträgt.

Aufgabe 9 Gegeben ist der Punkt $P(x, y)$ auf der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1\,.$$



Zeigen Sie: Setzt man

$$x = \cosh t\,,\; y = \sinh t\,, 0 \leq t < \infty\,,$$

so beträgt die schraffierte Sektorfläche ebenfalls $\frac{t}{2}$.

Aufgabe 10
Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

a)
$$\iint\limits_B e^{x+y}\,dA$$
über das Rechteck $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 2\}$,

b)
$$\iint\limits_B xy\,dA$$
über das Dreieck $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq x\}$.

c) In der Ebene ist durch die Eigenschaften
$$x \leq 1,\; y \leq 1,\; x + y \geq 1$$
ein Bereich B gegeben. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie dessen Flächeninhalt $\iint\limits_B \, dA$.

Aufgabe 11
Die Schwerpunktskoordinaten einer Fläche sind gegeben durch

$$x_S = \frac{1}{A}\iint\limits_B x\,dA\,,\quad y_s = \frac{1}{A}\iint\limits_B y\,dA\,.$$

Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten für

a) das Quadrat
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

b) die Fläche B, die von den Geraden $y = x + 2$ und der Parabel $y = -x^2 + 4$ begrenzt wird. Skizzieren Sie zunächst das Gebiet B.

c) die Kardioide
$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi\,,\; 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

4 Lineare Algebra

In diesem Abschnitt befassen wir uns vorwiegend mit der Lösung linearer Gleichungssysteme.

4.1 Lineare Gleichungssysteme und der Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus bietet ein Verfahren zur Umwandlung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

in eine Form

$$A'x = b'\,,$$

wobei die unterhalb der Hauptdiagonalen der Matrix A' stehenden Elemente gleich Null sind.

4.1.1 Einführung des Gauß-Algorithmus

Bei linearen Gleichungssystemen sind mehrere lineare Gleichungen gegeben, die gleichzeitig erfüllt sein sollen.

Beispiel zur Anwendung des Gauß-Algorithmus

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 && \text{(I)} \\ 2x + 2y - 2 &= -4z && \text{(II)} \\ -y - x - z &= -1 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sollte umgeformt werden zu

$$2x + 2y + 4z = 2\,.$$

Wenn wir nun die dritte Gleichung mit 2 multiplizieren, so folgt

$$\begin{aligned} 2x - 2y \qquad &= 0 && \text{(I)} \\ 2x + 2y + 4z &= 2 && \text{(II)} \\ -2x - 2y - 2z &= -2 && \text{(III)}\,. \end{aligned}$$

Mit (II)-(I) und (III)+(I) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 && \text{(I)} \\ 4y + 4z &= 2 && \text{(II)} \\ -4y - 2z &= -2 && \text{(III)}\,. \end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise formulieren wir das folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Mit (II)+(III) ergibt sich eine Dreiecksform der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus Gleichung (III) erhalten wir

$$z = 0 \, .$$

Damit folgt aus Gleichung (II)

$$4y + 4 \cdot 0 = 2$$

und somit

$$y = \frac{1}{2} \, .$$

Schließlich erhalten wir nach Gleichung (I)

$$2x - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

und damit

$$x = \frac{1}{2} \, .$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet also $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ und $z = 0$.
Man hätte auch versuchen können, das Gleichungssystem von einer *Dreiecksform* in *Diagonalform* umzuwandeln.

Wir formen folgendes Gleichungssystem weiter um:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Beispielsweise lässt sich Gleichung (II) durch 2 teilen und dann Gleichung (III) davon abziehen. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wenn wir nun Gleichung (II) zu Gleichung (I) addieren, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dann teilen wir alle Gleichungen durch 2. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

4.1.2 Grundlagen des Gauß-Algorithmus

Folgende *Äquivalenzumformungen* sind im Gauß-Algorithmus erlaubt:

- Vertauschen zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \neq 0$,
- Addition oder Subtraktion eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Diese Umformungen heißen *elementare Zeilenumformungen*.

Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir hier die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Der Gauß-Algorithmus dient dazu, die Koeffizientenmatrix so umzuwandeln, dass sie die Form einer oberen Dreiecksmatrix besitzt.

Der Gauß-Jordan-Algorithmus ist eine Variante des Gauß-Algorithmus. Durch dessen Anwendung soll die Koeffizientenmatrix die Form einer Diagonalmatrix annehmen.

Beispiel zur Umwandlung in eine obere Dreiecksmatrix

Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Geschrieben als erweiterte Koeffizientenmatrix lautet es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Nach Vertauschung der ersten beiden Zeilen ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Die erste Zeile nutzen wir nun zu folgender Umformung der Zeilen 2 bis 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 21 \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 10 & -6 & 7 & 21 \end{array}\right).$$

Ersetzen wir Zeile 2 durch ein Sechstel dieser Zeile, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 10 & -6 & 7 & 21 \end{array}\right).$$

Mit Hilfe der zweiten Zeile ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right).$$

und somit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Demnach lautet die Lösung

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = -4,\ x_4 = 1\,.$$

4.1.3 Unlösbare und unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Unlösbare lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$2x + y = 3 \qquad \text{(I)}$$

$$4x + 2y = 12 \quad \text{(II)}\,.$$

Diese Gleichungen lassen sich folgendermaßen umformen:

$$y = -2x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}(-4x + 12) = -2x + 6\,.$$

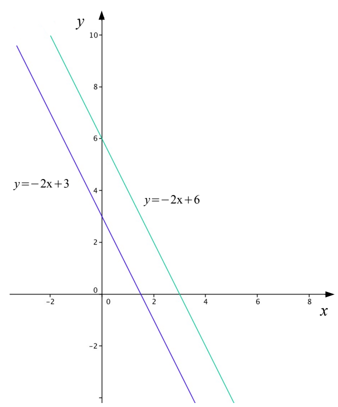


Abbildung 4.1 Parallele Geraden

Wenn wir (II) durch (II)-2(I) ersetzen, so erhalten wir

$$2x + y = 3$$

$$0 = 6\,.$$

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Sei beispielsweise für zwei Variablen nur eine Gleichung gegeben:

$$x - y = 3\,.$$

Alle Punkte, die auf der Geraden liegen, bilden die Lösungsmenge dieser Gleichung. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Es kann aber auch unendlich viele Lösungen geben, wenn man genauso viele Gleichungen wie Variablen hat, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$x - y = 3 \qquad \text{(I)}$$

$$-3x + 3y = -9 \quad \text{(II)}\,.$$

Die zweite Gleichung ist ein Vielfaches der ersten. Beide Gleichungen beschreiben die gleiche Gerade.

Ersetzen wir (II) durch (II)+3(I), so erhalten wir

$$x - y = 3$$

$$0 = 0\,.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 3 + y \text{ mit } y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Lineare Gleichungssysteme mit weniger nicht-trivialen Gleichungen als Variablen heißen *unterbestimmte Gleichungssysteme*.

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 8 \\ 5x + 6y + 7z &= 8 \\ 9x + 10y + 11z &= 12\,. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise heißt das

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}\,.$$

Wir verwenden nun den Gauß-Algorithmus.

Mit $\frac{1}{2}$(I), (II)-$\frac{5}{2}$(I) und (III)-$\frac{9}{2}$(I) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -24 \end{pmatrix} .$$

Nun betrachten wir -$\frac{1}{4}$(II) und -$\frac{1}{8}$(III). Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Mit (III)-(II) folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Betrachten wir nun Gleichung (II) und (I). So erhalten wir:

$$y = 3 - 2z$$

und

$$x + 2 \cdot (3 - 2z) + 3z = 4\,.$$

Daher ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -2 + z \text{ und } y = 3 - 2z \text{ mit } z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Gleichungssysteme mit reellen Parametern

Es sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ b \end{pmatrix} .$$

Mit (II)-4(I) und (III)-(I) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & (a-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ b-1 \end{pmatrix} .$$

Nun ersetzen wir (II) durch -$\frac{1}{2}$(II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & (a-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b-1 \end{pmatrix} .$$

Ersetzen wir (III) durch (III)-3(II), so folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & (a+4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ b+8 \end{pmatrix} .$$

Was lässt sich nun zur Lösbarkeit des Gleichungssystems sagen?

(1) Für $a \neq -4$ gibt es eine eindeutige Lösung.

(2) Für $a = -4$ und $b = -8$ ist das Gleichungssystem (einfach) unterbestimmt. Es gibt unendlich viele Lösungen.

(3) Für $a = -4$ und $b \neq -8$ ist das Gleichungssystem unlösbar.

Für Fall (1) gilt

$$z = \frac{b+8}{a+4}$$

$$y = -3 + 2z = -3 + 2\frac{b+8}{a+4}$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 + 3 - 2z - 2z = 4 - 4z = 4 - 4\frac{b+8}{a+4}\,.$$

Für Fall (2) gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$y = -3 + 2z$$

und

$$x = 1 - y - 2z = 4 - 4z\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher

$$\mathbb{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 4 - 4z \text{ und } y = -3 + 2z \text{ mit } z \in \mathbb{R}\}\,.$$

4.1.4 Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$Ax = b\,,$$

wobei die Koeffizientenmatrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben ist und $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sei.

Wir schreiben für die Menge solcher Matrizen $M(m \times n, \mathbb{K})$.
Der Vektor x ist definiert durch

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

und der Vektor b durch

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \,.$$

Sind alle $b_i = 0$, so heißt das Gleichungssystem *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Die Elemente a_{ii} heißen Hauptdiagonalelemente.

Anmerkung: Ein homogenes Gleichungssystem ist immer lösbar, nämlich durch die Nulllösung.

Lösungskriterien

Die *erweiterte Koeffizientenmatrix* $(A|b)$ ist definiert durch

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) .$$

Rang einer Matrix

Ein r-Tupel $(v_1, ..., v_r)$ von Vektoren v_i, $i = 1, ..., r$, eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ heißt

- *linear abhängig*, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt und
- *linear unabhängig*, wenn aus

  $$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0\,, \quad \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}\,,$$

  stets

  $$\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

  folgt.

Der Rang $rg\,A$ einer Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ ist gleich

- der Maximalzahl linear unabhängiger Spalten und
- der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen.

Neben den oben genannten *elementaren Zeilenumformungen*, existieren analog erklärte *elementare Spaltenumformungen*. Zusammenfassend werden diese als elementare Umformungen bezeichnet.

Der Rang einer Matrix wird durch elementare Umformungen nicht verändert.

Beispiel zur Bestimmung des Ranges einer Matrix

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, dürfen wir elementare Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden. Es gilt

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Lösungskriterien

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und

$$Ax = b\,.$$

Demnach ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Variablen x_i.

Ist

- $rg\,A = rg\,(A|b) = n$,
  dann ist das lineare Gleichungssystem *eindeutig lösbar*,
- $rg\,A = rg\,(A|b) < n$,
  dann ist das lineare Gleichungssystem *lösbar* und *unterbestimmt*,
- $rg\,A \neq rg\,(A|b)$,
  dann ist das lineare Gleichungssystem *unlösbar*.

Beispiel

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die jeweiligen Lösungsmengen von

$$Ax = b_1 \text{ und } Ax = b_2\,.$$

Während im ersten Fall alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} :\ x_1 + x_2 + x_3 = 2$ das Gleichungssystem lösen, existiert im zweiten Fall keine Lösung.

Um die obigen Lösungskriterien anzwenden, bestimmen wir nun $rg\,A$ und $rg\,(A|b_1)$ sowie $rg\,(A|b_2)$. Es gilt

$$rg\,A = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Für den jeweiligen Rang der beiden erweiterten Koeffizientenmatrizen erhalten wir

$$rg\,(A|b_1) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1$$

und

$$rg\,(A|b_2) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2\,.$$

4.2 Matrizenrechnung

Wir betrachten Matrizen mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$, wobei unter $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ verstanden wird.

Statt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

können wir auch

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

oder

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$$

schreiben.

Addition und Multiplikation von Matrizen

Addition und skalare Multiplikation von Matrizen werden elementweise durchgeführt.

Definition: Seien $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann wird

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$$

und

$$\lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$$

gesetzt.

Definition: Seien $A = (a_{ik}) \in M(r \times m, \mathbb{K})$ und $B = (b_{kj}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Dann wird das Produkt $C := AB \in M(r \times n, \mathbb{K})$ mit

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}} ,$$

durch

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

definiert.

Der Koeffizient c_{ij} wird demnach bestimmt, indem

- die Einträge der i-ten Zeile von A mit den Einträgen der j-ten Spalte von B für die jeweils festen Werte von k multipliziert
- und diese dann für $k = 1$ bis $k = m$ summiert werden.

So gilt beispielsweise für c_{12}

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + ... + a_{1m}b_{m2} \, .$$

Beispiel zur Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 8 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 41 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Um das Produkt AB zu bilden, muss, wie oben vorausgesetzt, die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen. Auch wenn, AB definiert ist, muss daher BA nicht notwendigerweise existieren.

Die Matrizenmultiplikation

- ist *assoziativ*, d.h. es gilt
  $$(AB)C = A(BC) \, ,$$
- ist, hinsichtlich der Addition, *distributiv*, d.h.
  $$A(B + C) = AB + AC \ \text{ und } \ (A + B)C = AC + BC \, .$$

Die Matrizenmultiplikation

- ist *nicht kommutativ*, d. h. es existieren Matrizen A, B, so dass
  $$AB \neq BA \, ,$$
- *nicht nullteilerfrei*, d. h. es existieren Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$, so dass
  $$AB = 0 \, .$$

  Beispiel

  Für
  $$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  gilt
  $$AB = 0 \ \text{ und } \ BA \neq AB \, .$$

Beispiel zur Matrizenmultiplikation

Die relative Anzahl der Kunden dreier Unternehmen A, B und C wird über zwei Jahre beobachtet, wobei auch die "Wanderungsbewegung" der Kunden zwischen den Unternehmen untersucht wird.

Jeder Kunde lässt sich in dem Zeitraum eindeutig einem der drei Unternehmen zuordnen. Zu Beginn des ersten Jahres werden

- 55% der Kunden als Kunden des Unternehmens A,
- 35% als Kunden des Unternehmens B und
- 10% als Kunden des Unternehmens C

bezeichnet.

Bei zusätzlich gegebenem Wechselverhalten, ist nach der relativen Anzahl der Kunden der drei Unternehmen zum Ende des zweiten Jahres gefragt.
Am Ende des ersten Jahres zeigt sich folgendes Wechselverhalten:

von / nach	A	B	C
A	0,8	0,1	0,3
B	0,1	0,7	0,2
C	0,1	0,2	0,5

und am Ende des zweiten Jahres:

von / nach	A	B	C
A	0,6	0,2	0,1
B	0,1	0,6	0,1
C	0,3	0,2	0,8

Der jeweilige Anteil am Ende des ersten Jahres lässt sich beispielsweise mittels

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,35 \\ 0,10 \end{pmatrix}$$

berechnen.

So ergibt sich beispielsweise für Unternehmen A zum Ende des ersten Jahres ein Anteil von

$$0,8 \cdot 0,55 + 0,1 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,10 = 0,505\,.$$

Zum Ende des zweiten Jahres betragen die Anteile

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,35 \\ 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3845 \\ 0,2600 \\ 0,3555 \end{pmatrix} .$$

Dabei ist das Produkt assoziativ, so dass das Produkt der beiden Matrizen angewandt auf den ”Anteilsvektor” zum gleichen Ergebnis führt, wie die jahresweise Berechnung der Anteile.

4.3 Determinanten

Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, lässt sich schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Bezeichnen wir die einzelnen Zeilen durch die Vektoren

$$a_i := (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}) ,$$

so können wir A folgendermaßen umformulieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Die Abbildung

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

heißt *Determinante*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Abbildung $\det$ ist *linear in jeder Zeile*, d.h. für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
  - und $a_i = a_i' + a_i''$, mit $i = 1, ..., n$, gilt

$$\det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i' \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i'' \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

  - und $a_i = \lambda a_i'$, mit $\lambda \in \mathbb{K}$, gilt

$$\det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ a_i' \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} .$$

- Die Abbildung $\det$ ist *alternierend*, d.h. wird A durch Vertauschen zweier Zeilen in A' verwandelt, so gilt

$$\det A' = -\det A\,.$$

- Ist $E \in M(n \times n, \mathbb{K})$ die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\det E = 1\,.$$

Statt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

schreiben wir auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

- Für $n = 1$ und $A = (a)$ gilt

$$\det(a) = a\,.$$

- Für $n = 2$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

- Für $n = 3$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

Regel von Sarrus

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Nach der Regel von Sarrus erhalten wir die oben genannte Formel mittels der Anordnung

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

und der Konvention, die Produkte längs der drei Diagonalen von links oben nach rechts unten mit positivem Vorzeichen und die Produkte von links unten nach rechts oben mit negativem Vorzeichen zu versehen.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3) = -16\,.$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile: Ist $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{für alle } i = 1, ..., n\,.$$

Dabei bezeichnet A_{ij} die Matrix, die aus A entsteht, wenn die i-te Zeile und die j-te Spalte weggelassen werden.

Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte: Ist $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{für alle } j = 1, ..., n\,.$$

Beispiel

Mit dem *Laplaceschen Entwicklungssatz* lässt sich

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3\,. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbb{K})\,.$$

Die Determinante

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

hat folgende Eigenschaften:

- Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

  $$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A\,.$$

- Gibt es eine Zeile i mit $a_i = (0, ..., 0)$, so gilt

  $$\det A = 0\,.$$

- Entsteht A' durch Vertauschung zweier Zeilen aus A, so gilt

  $$\det A' = -\det A\,.$$

- Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und entsteht A' durch Addition von $\lambda a_j = (\lambda a_{j1}, ..., \lambda a_{jn})$ zu a_i mit $i \neq j$, so gilt

  $$\det A' = \det A\,.$$

- Es gilt

  $$\det A = 0$$

  genau dann, wenn die Zeilenvektoren $a_1, ..., a_n$ linear abhängig sind.

- Ist A eine obere Dreiecksmatrix, d.h.

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

  so gilt

  $$\det A = a_{11} \cdot ... \cdot a_{nn}\,.$$

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, so ist das das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

genau dann *eindeutig lösbar*, wenn

$$\det A \neq 0\,.$$

Cramersche Regel

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\det A \neq 0$, $b \in \mathbb{K}^n$ und $x \in \mathbb{K}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b\,.$$

Unter $a^1, ..., a^n$ verstehen wir die Spaltenvektoren von A. Dann gilt

$$x_i = \frac{\det(a^1, ..., a^{i-1}, b, a^{i+1}, ..., a^n)}{\det A}\,.$$

Beispiel

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\det A = 2$$

und, nach der Cramerschen Regel,

$$x_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,, \quad x_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

und

$$x_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\,.$$

4.4 Eigenwertprobleme

Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, wenn es ein $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, mit

$$Ax = \lambda x$$

gibt. Dann heißt x *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ.

Beispiel

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

Das charakteristische Polynom

Das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)x = 0$$

hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$rg\,(A - \lambda E) < n$$

ist. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

ist.

Für das *charakteristische Polynom*

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

gilt

$$p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n\,,$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$, $a_i \in \mathbb{K}$ und $a_n \neq 0$.

Beispiel

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2\,.$$

Demnach sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1\,.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren x sind Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 1 \cdot x\,.$$

Somit erhalten wir

$$x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Anmerkung: Es muss keine reellen Eigenwerte geben, wie beispielsweise die Bestimmung des charakteristischen Polynoms von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt. Hier erhalten wir

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1\,.$$

Beispiel

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lautet

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} .$$

Der Wert der Determinante wird nicht verändert, wenn wir zu einem Zeilenvektor das Vielfache eines anderen Zeilenvektors addieren. Daher gilt

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda + 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda + 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda + 1 & 1 - \lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-\lambda + 1)\left((-\lambda + 1)(-\lambda) - (1 - \lambda)\right) - (1 - \lambda)^2 \\ &= -(1 - \lambda)^2 \cdot (\lambda + 2) . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind demnach

$$\lambda_{1,2} = 1 \, , \lambda_3 = -2$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$x_{1,2} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu, \nu \in \mathbb{R} : x_{1,2} \neq 0$$

und

$$x_3 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\} .$$

4.5 Übungsaufgaben: Lineare Algebra

Aufgabe 1
Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

a)

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +x_2 & & = & 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = & 17 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & & +x_3 & -x_4 & +4x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 5 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +8x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & -18x_4 & +9x_5 & = & 8 \end{array}$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie ein Polynom, dessen Graph folgende Punkte enthält:

a) $P_0(0,0),\ P_1(1,6),\ P_2(2,0)$ mit $y = ax^2 + bx + c\,$,

b) $P_0(-1,2),\ P_1(-2,-11),\ P_2(1,-2),\ P_3(2,5)$ mit $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,$.

Aufgabe 3
Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche der Matrizen-Produkte

$$AA,\ AB,\ AD,\ BD,\ DB,\ DD$$

sind definiert? Berechnen Sie diese.

b) Welche weiteren Produkte dieser Matrizen existieren?

c) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A, B, C und D.

Aufgabe 4
Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

a)

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha x + y + z \\ \alpha &= x + \alpha y + z \\ 1 &= x + y + \alpha z \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -2 &= x - y + z \\ -4 &= 2x + \beta z \\ \alpha &= -x + 2y + z \end{aligned}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & -\frac{4}{5} & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{\alpha}{5} \\ \frac{25}{4} \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & \alpha \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 = & \alpha - 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 = & \alpha + 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 5
Berechnen Sie folgende Determinanten:

a)

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 10 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

d)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$$

e)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6
Welchen Rang haben die folgenden Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie für folgende Matrizen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e)
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

f)
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen stellen einen Zusammenhang zwischen einer gesuchten Funktion und einigen ihrer Ableitungen her.

5.1 Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

- Die (linear) gedämpfte Schwingung (mit äußerer Kraft)

  $$Dx(t) + kx'(t) + mx''(t) = F_a(t)$$

- Der RLC-Serienschwingkreis mit äußerer Spannung

  $$\frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t) = U_a(t)$$

- Diffusiver Ausgleichsprozess

  $$c'(t) = k(c_a - c(t))$$

- Das mathematische Pendel

  $$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0$$

- Die logistische Differentialgleichung

  $$P'(t) = \gamma P(t) - \tau P^2(t)$$

- Kinetik bimolekularer chemischer Reaktionen ($A + B \to C$)

  $$c'(t) = k(c_a - c(t))(c_b - c(t))\,.$$

5.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : G \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann wird

$$y' = f(x, y)$$

als eine *Differentialgleichung erster Ordnung* bezeichnet.

5.2.1 Lineare Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)y + b(x)$$

lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist $b = 0$, so wird diese Differentialgleichung als *homogen*, ansonsten als *inhomogen* bezeichnet.
Sei $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y\,,$$

die der Bedingung

$$\varphi(x_0) = c$$

genügt. Für diese Lösung gilt

$$\varphi(x) = c\exp(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,dt)\,.$$

Beispiel

Sei $k \in \mathbb{R}$. Für die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' = ky$$

mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(x_0) = c$$

gilt

$$\varphi(x) = ce^{k(x-x_0)}\,.$$

Anmerkung: Beispielsweise kann die Konzentration $y(t)$ eines Stoffes A, die, infolge einer chemischen Reaktion $A \to B$, abnimmt und der Differentialgleichung

$$y'(t) = -\kappa y(t)$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0$$

genügt, auf diese Art bestimmt werden.

Die Methode der Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich zwar auch auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung anwenden, jedoch beschränken wir uns hier auf Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Dann gibt es zu beliebigem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung

$$\psi : I \to \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = c$.

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$$

mit $\varphi(x_0) \neq 0$, so lässt sich eine beliebige Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung schreiben als

$$\psi(x) = \varphi(x)u(x)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $u : I \to \mathbb{R}$.

Für die Ableitung ψ' erhalten wir

$$\psi' = \varphi' u + \varphi u' = a\,\varphi u + \varphi u'\,.$$

Da ψ eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, gilt außerdem

$$\psi' = a\,\psi + b = a\,\varphi u + b\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\varphi u' = b$$

und somit

$$u(x) - u(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)^{-1} b(t)\, dt$$

ist.

Diese Lösung unseres Anfangswertproblems lautet daher

$$\psi(x) = \varphi(x)(c + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)^{-1} b(t)\, dt)\,,$$

wobei

$$\varphi(x) = \exp(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\, dt)\,.$$

Beispiel

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy + x^3 \ \text{ mit } \ y(0) = -1\,.$$

Die gesuchte Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = 2xy$$

lautet

$$\varphi(x) = \exp\left(\int\limits_{0}^{x} 2t\, dt\right) = e^{x^2}\,.$$

Daher gilt für die Lösung ψ der inhomogenen Gleichung, unter der Anfangsbedingung $\psi(0) = -1$,

$$\psi(x) = e^{x^2}\left(-1 + \int\limits_{0}^{x} t^3 e^{-t^2}\, dt\right)\,.$$

Nach Substitution und partieller Integration erhalten wir

$$\int t^3 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int ue^u\,du = \frac{1}{2}(ue^u - \int e^u\,du) = \frac{1}{2}(u-1)e^u + C$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2+1)e^{-t^2} + C$$

und schließlich

$$\psi(x) = e^{x^2}\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)\,.$$

5.2.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene (eigentliche oder uneigentliche) Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gelte.

Dann ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y) \ \text{ in } I \times J \ \text{ mit } y(x_0) = y_0$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 *eindeutig lösbar*.

Die Lösung erhalten wir, indem wir die Gleichung

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

nach y auflösen.

Beispiel

Das Anfangswertproblem

$$y'y + x = 0\,, \quad y(1) = 1$$

lässt sich mit Hilfe der Integration

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

lösen. So ergibt sich

$$\frac{y^2}{2} = C - \frac{x^2}{2}\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ impliziert, dass $C = 1$ ist.

Schließlich erhalten wir

$$y(x) = \sqrt{2 - x^2}\,.$$

5.2.3 Die Differentialgleichung $y' = f(\frac{y}{x})$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Differentialgleichung

$$y' = f(\frac{y}{x})\,, \text{ mit } x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\,,$$

lässt sich, mittels der Substitution $z := \dfrac{y}{x}$, in die Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

umwandeln. Diese Differentialgleichung gehört zu dem bereits behandelten Typ von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2,\ x \neq 0\,,$$

geht, mittels $z := \dfrac{y}{x}$, über in

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2)\,.$$

Demnach erhalten wir

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

und schließlich $y = y(x)$ nach Umformung von

$$\arctan z = \ln|x| + C\,.$$

5.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition: Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : G \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion.

Dann wird

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

als eine *Differentialgleichung n-ter Ordnung* bezeichnet.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $b, a_k : I \to \mathbb{R}$, mit $0 \leq k \leq n-1$, stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.
Ist $b = 0$, so wird diese Differentialgleichung als *homogen*, ansonsten als *inhomogen* bezeichnet.

Wir nennen

- L_H den Vektorraum aller Lösungen der homogenen und
- L_I die Menge aller Lösungen der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.

Dann gilt für ein beliebiges $\psi_0 \in L_I$

$$L_I = \psi_0 + L_H\ .$$

Demnach setzt sich die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

- aus der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung und
- einer partikulären (speziellen) Lösung y_p der inhomogenen Gleichung zusammen.

Dabei gilt

$$y = y_p + y_h\ .$$

5.3.1 Gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei

$$D := \frac{d}{dx} \text{ und } P(D) = a_0 + a_1 D + ... + a_n D^n.$$

Dann lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten folgendermaßen schreiben:

$$P(D)y = 0\,.$$

Es gilt

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

wobei $P(\lambda)$ ein Polynom ist. Es wird als *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung bezeichnet.

Nullstellen von $P(\lambda)$

a) Das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ habe n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$.

   Dann bilden die Funktionen $\varphi_l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_l(x) := e^{\lambda_l x}, \quad l = 1, ..., n$$

   ein Fundamentalsystem von Lösungen (= Basis des Lösungsvektorraumes) der Differentialgleichung $P(D)y = 0$.

b) Das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ habe r paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $1 \le l \le r$, mit den *Vielfachheiten* k_l.

   Dann bilden die Funktionen $\varphi_{lm} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_{lm}(x) := x^m e^{\lambda_l x}, \quad 1 \le l \le r,\ 0 \le m \le k_l - 1$$

   ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $P(D)y = 0$.

Die allgemeine Lösung φ der Differentialgleichung ist die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\,, \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{C}\,,$$

des Lösungsfundamentalsystems $\{\varphi_i\}$.

Beispiele

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

  $$y'' + 4y' + 3y = 0$$

  lautet

  $$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3\,.$$

  Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

  $$\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = -3\,.$$

  Als allgemeine Lösung φ erhalten wir demnach

  $$\varphi(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}\,.$$

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

  $$y''' - y'' - 2y' = 0$$

  lautet

  $$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda\,.$$

  Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

  $$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = -1\,, \lambda_3 = 2\,.$$

  Als allgemeine Lösung φ erhalten wir demnach

  $$\varphi(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}\,.$$

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

  $$y''' - 2y'' + y' = 0$$

  lautet

  $$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda-1)^2\,.$$

  Die Nullstellen von $P(\lambda)$ sind

  $$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 1\,\text{(doppelt)}\,.$$

  Als allgemeine Lösung φ erhalten wir demnach

  $$\varphi(x) = c_1 + c_2e^{x} + c_3xe^{x}\,.$$

Anwendungen

Freie gedämpfte mechanische Schwingungen

Die Auslenkung $x(t)$ genüge der Differentialgleichung

$$Dx(t) + kx'(t) + mx''(t) = 0\,,$$

wobei

- Trägheitskraft: $mx''(t)$
- Reibungskraft: $-kx'(t)$
- Rückstellkraft: $-Dx(t)$.

Der RLC-Serienschwingkreis ohne äußere Spannungsquelle

Hier genügt die Ladung $Q(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t) = 0\,,$$

wobei

- Kapazität: C
- Ohmscher Widerstand: R
- Induktivität: L.

Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y''(t) + 2\mu\, y'(t) + \omega_0^2\, y(t) = 0\,,$$

wobei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, und Lösungen unter bestimmten Anfangsbedingungen.

Schwingungen unter der Bedingung $0 < \mu < \omega_0$

Hier erhalten wir

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0\,.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die komplexen Zahlen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} = -\mu \pm i\omega\,,$$

$$\text{wobei } \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{(-\mu + i\omega)t} + c_2 e^{(-\mu - i\omega)t}$$

lässt sich umformen zu

$$y(t) = e^{-\mu t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})\,.$$

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

erhalten wir

$$y(t) = e^{-\mu t}(d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t))\,.$$

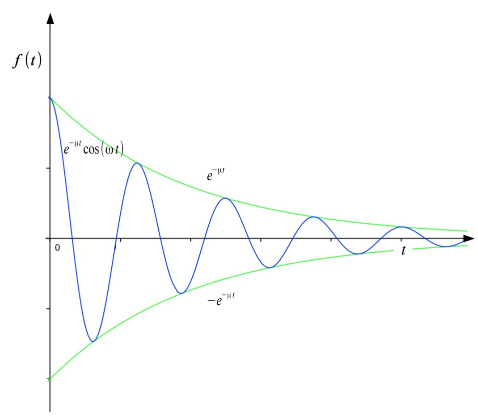


Abbildung 5.1 Gedämpfte Schwingung

Mit den Anfangsbedingungen

$$y(t=0) = y_0$$

und

$$y'(t=0) = 0$$

folgt

$$y_0 = y(t=0) = e^{-\mu\cdot 0}(d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega \cdot 0))$$

und

$$0 = y'(t=0) = -\mu e^{-\mu\cdot 0}(d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega t \cdot 0) \\ + e^{-\mu\cdot 0}(-d_1\omega \sin(\omega \cdot 0) + d_2\omega \cos(\omega \cdot 0))\,.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen impliziert

$$d_1 = y_0$$

und die zweite

$$d_2 = \frac{\mu}{\omega} \cdot y_0\,.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$y(t) = y_0 e^{-\mu t}(\cos(\omega t) + \frac{\mu}{\omega}\sin(\omega t))\,.$$

Der aperiodische Grenzfall (für $\mu = \omega_0$)

Die Lösung von

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ist

$$\lambda_{1,2} = -\mu\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$y(t) = e^{-\mu t}(c_1 + c_2 t)\,.$$

Unter der Anfangsbedingung $y(t = 0) = y_0$ und $y'(t = 0) = 0$ erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = y_0 e^{-\mu t}(1 + \mu t)\,,$$

wobei $\mu = \omega_0$.

Der aperiodische Fall (Kriechfall) (für $\mu > \omega_0$)

Die Lösungen von

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

sind

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < 0\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$y(t) = c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t} \quad \text{wobei } \mu_i := -\lambda_i > 0 \,.$$

Unter der Anfangsbedingung $y(t = 0) = y_0$ und $y'(t = 0) = 0$ erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung:

$$y(t) = \frac{y_0}{\mu_2 - \mu_1}(\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}) \,.$$

5.3.2 Gewöhnliche inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zu den Methoden, eine partikuläre Lösung einer

inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

zu finden, gehören

- die *Variation der Konstanten* und
- die *Laplace-Transformation*.

Es gibt auch eine Reihe von Ansatzfunktionen, die sich nutzen lassen.

Ansatzfunktionen für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

Es sei

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$

mit Konstanten $a_k \in \mathbb{R}$. Ferner sei $I \subset \mathbb{R}$ und

$$b : I \to \mathbb{R}$$

sei eine stetige Funktion.

Dann lassen sich mittels folgender Ansatzfunktionen partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$P(D)y = b$$

bestimmen.

Seien $b_i, A_i \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

- Ist b ein Polynom mit $b(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$
  und
  - $P(\lambda = 0) \neq 0$, so ist
    $$y_p(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m$$
  - $\lambda = 0$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist
    $$y_p(x) = x^k(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m)$$

  ein Lösungsansatz.
- Ist $b(x) = (b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m)e^{\alpha x}$
  und
  - $P(\lambda = \alpha) \neq 0$, so ist
    $$y_p(x) = (A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)e^{\alpha x}$$
  - $\lambda = \alpha$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist
    $$y_p(x) = x^k(A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)e^{\alpha x}$$

  ein Lösungsansatz.
- Ist $g(x) = \cos(\beta x)$ oder $g(x) = \sin(\beta x)$, $b(x) = (b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m)g(x)$
  und
  - $P(\lambda = i\beta) \neq 0$, so ist
    $$y_p(x) = (A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + ...B_m x^m)\sin(\beta x)$$
  - $\lambda = i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist
    $$y_p(x) = x^k((A_0 + A_1 x + ...A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + ...B_m x^m)\sin(\beta x))$$

  ein Lösungsansatz.

Beispiel

Um die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - y = 1 + x^3$$

zu lösen, bestimmen wir die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung

$$y''' - y = 0$$

und die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung mit dem oben beschriebenen Ansatz

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \,.$$

Für die Lösung y_h der homogenen Gleichung bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \,.$$

Da für die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \,, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gilt, folgt

$$y_h(x) = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) \,.$$

Setzen wir y_p in die inhomogene Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$3 \cdot 2 \cdot A_3 - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) = 1 + x^3$$

und demnach

$$A_3 = -1 \,, \; A_2 = 0 \,, \; A_1 = 0 \,, A_0 = -7 \,.$$

Daher gilt

$$y_p(x) = -7 - x^3 \,.$$

Die allgemeine Lösung y der inhomogenen Gleichung lautet daher

$$y(x) = -7 - x^3 + c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) \,.$$

Anwendungen

Erzwungene gedämpfte mechanische Schwingungen

Hier betrachten wir ein System, das sinusförmig schwingen kann, beispielsweise ein quasielastisches Pendel, dessen Schwingungen durch die Stokes-Reibung gedämpft werden.

Die Auslenkung $x(t)$ genüge der Differentialgleichung

$$Dx(t) + kx'(t) + mx''(t) = F_a(t)\,.$$

Es wirke eine periodische äußere Kraft $F_a(t)$, wobei

$$F_a(t) = F_0 \cos(\omega t)\,.$$

Die Kraft $F_a(t)$ ist daher harmonisch veränderlich mit der konstanten Kreisfrequenz ω und der konstanten Anregungsamplitude F_0.

Zusätzlich gehen wir hier davon aus, dass

$$0 < \frac{k}{2m} < \sqrt{\frac{D}{m}}$$

gilt.

Um eine partikuläre Lösung unserer inhomogenen Gleichung

$$y''(t) + 2\mu\, y'(t) + \omega_0^2\, y(t) = y_a(t)$$

zu finden, können wir die Differentialgleichung zu einer Differentialgleichung für komplexe Funktionen verallgemeinern und den Realteil dieser Lösung bestimmen.

Wir betrachten daher die Differentialgleichung

$$z''(t) + 2\mu\, z'(t) + \omega_0^2\, z(t) = y_{0,a} e^{i\omega t}\,,$$

wobei μ, ω_0 und $y_{0,a}$ wie bisher definiert sind.

Mit dem Ansatz

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

erhalten wir

$$z_0 = \frac{y_{0,a}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\mu\omega}$$

und damit eine partikuläre Lösung $y_p(t)$.

Die komplexe Amplitude z_0 lässt sich auch als

$$z_0 = Ae^{i\varphi}, \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R},$$

schreiben.

Der Ansatz

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)} \,,$$

impliziert

$$A(-\omega^2 + 2i\mu\omega + \omega_0^2) = y_{0,a}e^{-i\varphi} \,.$$

Daraus folgt für die Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$A = \frac{y_{0,a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \,.$$

Betrachten wir nun die Amplitude A, für $\mu < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, so zeigt sich, dass deren Maximalwert bei $\omega = \omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}$ angenommen wird und

$$A_{max} = A(\omega_R) = \frac{y_{0,a}}{2\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} = \frac{y_{0,a}}{2\mu\omega_\mu}$$

beträgt.

Die Frequenz ω_R heisst daher *Resonanzfrequenz*.

5.4 Übungsaufgaben: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a) $y' + \cos x \cdot y = 0\,, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$

b) $x(x+1)\,y' = y\,, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

c) $y^2 y' + x^2 = 1\,, \quad y(2) = 1.$

Aufgabe 2
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

a) $y' = (x + y + 1)^2$

b) $y \cdot y' = x + \frac{y^2}{x}$ mit Anfangswert $y(1) = \sqrt{2}$.

Aufgabe 3
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch *Variation der Konstanten*:

a) $xy' - y = x^2 \cdot \cos x\,, \quad y(\pi) = 2\pi$

b) $y' + \tan x \cdot y = 5\sin(2x)\,, \quad y(3\pi) = 2$

c) $xy' + y = \ln x\,, \quad y(1) = 1$

d) $y' + \tan x \cdot y = \sin x \cdot \cos x\,, \quad y(0) = 1.$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung folgender inhomogener Differerentialgleichungen:

a) $y' - 6y = 3e^{6x}$

b) $y' - 5y = 2\cos x - \sin(3x).$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen 2. Ordnung:

a) $y'' + y = 0$

b) $y'' + 2y' + y = 0$

c) $y'' + y' - 2y = 0$

d) $y'' - 2y' + 2y = 2$

e) $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 4x$

f) $y'' + 2y' + y = -2\sin(2x)$.

Aufgabe 6
Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

a) $y'' - 2y' + 2y = 2\,, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$

b) $y'' + 2y' + y = -2\sin(2x)\,, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Aufgabe 7
Ein Atom A verbindet sich mit einem Atom B zu einem Molekül AB. Die Anzahl der Atome A zur Zeit $t = 0$ sei a, die der Atome B zur Zeit $t = 0$ sei b. Die Anzahl der Moleküle AB sei $x(t)$ und genüge der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)\,,$$

mit einer Konstanten k. Lösen Sie die Differentialgleichung für $a > b$. Wann kommt die Reaktion zum Stillstand?

Aufgabe 8
Sei

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x)\,,$$

mit Störfunktionen f, wobei

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

b) $f(x) = 2e^x$,

c) $f(x) = \cos x$,

d) $f(x) = \sin x$,

e) $f(x) = e^{-x}$,

f) $f(x) = -x^2 e^x$,

g) $f(x) = xe^{-x}$.

Geben Sie die allgemeine Lösung für die homogene Differentialgleichung und jeweils eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Aufgabe 9
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a)

$$y'(x) + xy^2(x) = 0\,, \quad y(1) = 0 \text{ bzw. } y(1) = 1\,,$$

b)

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)}\,, \quad y(x) \neq 0\,,\ y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 10
Sei

$$mx''(t) + kx'(t) + Dx(t) = F(t)\,.$$

(i) Sei $m = 0,5\,kg$, $D = 128\,Nm^{-1}$ und $F(t) = 0$. Für welchen Wert von k tritt der aperiodische Grenzfall auf? Für welche Werte treten Schwingungslösungen auf?

(ii) Sei $m = 0,5\,kg$, $D = 128\,Nm^{-1}$ und $F(t) = 0$. Geben Sie die Lösung für den aperiodischen Grenzfall mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0,2\,m$ und $x'(0) = 0$ an.

(iii) Sei $m = 10\,kg$, $D = 50\,Nm^{-1}$, $k = 20\,kgs^{-1}$ und

$$F(t) = 10\,N\sin(\omega t)$$

mit $\omega = 1\,s^{-1}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 11

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$9y'' - 12y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = \frac{1}{3}\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 0\,.$$

Bestimmen Sie den reellen Parameter a zu

$$x(0) = 2\,,\ x'(0) = a$$

so, dass $x(t = 1) = 0$ ist.

c) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

(i)

$$y'' + 2y = x^2 + 2x + 4\,,$$

(ii)

$$y'' + y = x^2 + \exp(5x) + \cos(2x)\,,$$

(iii)

$$y'' + 2y' + 82y = 164 + 164\exp(-2x)\,,$$

(iv)

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 32t^2\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,.$$

5.5 Übungsaufgaben: zur Wiederholung

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie folgendes Integral mittels partieller Integration:

$$\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx\,.$$

b) Berechnen Sie folgendes Integral mittels Substitution:

$$\int \frac{1}{x(-1+\ln x)}\,dx\,.$$

Aufgabe 2
In der Ebene ist durch die Eigenschaften

$$0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1$$

ein Bereich B gegeben. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B (x^2 - y)\,dA\,.$$

Aufgabe 3
Berechnen Sie die folgenden Potenzen:

a) $(1-i)^5$, b) $(1+i)^8$,

c) $(1+\sqrt{3}\,i)^4$, d) $(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}(1+i))^{25}$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass $z_0 = i$ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(z) = z^6 - 3z^4 + 12z^2 + 16$$

ist. Berechnen Sie alle Nullstellen von $p(z^2)$.

Aufgabe 5
Gegeben sei

$$u_1(t) = 2\sin t\,,\ u_2(t) = \sin(t + \frac{2\pi}{3})\,,\ u_3(t) = \sin(t + \frac{4\pi}{3})\,.$$

a) Stellen Sie die komplexen Amplituden der Summen

$$u_1(t) + u_2(t) \text{ und } u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

im Zeigerdiagramm dar.

b) Stellen Sie diese Summen in der Form

$$A\sin(t + \varphi)\,,$$

mit $A \in \mathbb{R}$, dar.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2(\cos x - 1)$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin x + 2\cos x - 2$$

jeweils das Taylor-Polynom vierter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(\cos x - 1)}{x\sin x + 2\cos x - 2}\,.$$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die reellen Eigenwerte und zu $\lambda = 1$ den zugehörigen Eigenvektor.

Aufgabe 8
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{llll} x & +2y & +z & = 0 \\ \alpha x & +(1+\alpha)y & +2z & = 0 \\ \alpha x & +2y & +3\alpha z & = 0 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

Aufgabe 9
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = 2x - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Tangentialebene für den Graphen von f im Punkt $P(3, 4, f(3, 4))$.

b) Sei

$$x = 3 \pm 0,1\,, \; y = 4 \pm 0,1\,.$$

Berechnen Sie den maximalen absoluten Fehler von f.

Aufgabe 10
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - \frac{2}{x}y = 3x^2 - 2x$$

mittels *Variation der Konstanten*.

Aufgabe 11

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + y \tan x = 2 \tan x \,, \quad y(\pi) = -1$$

durch *Variation der Konstanten*.

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = 30 \sin(4x) + 6 \cos(2x) \,.$$

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ Körper der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Körper der reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen

Literatur

[1] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Nauka

[2] P. Dörsam, *Oberstufenmathematik leicht gemacht, Band 2: Lineare Algebra, Analytische Geometrie*, PD-Verlag

[3] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg

[4] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg

[5] O. Forster, *Analysis 1, 2, 3*, Vieweg

[6] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner

[7] K. Jänich, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag

[8] R. Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag

[9] F. Reinhardt, H. Soeder, *dtv-Atlas zur Mathematik*, Deutscher Taschenbuch Verlag

[10] SMART, *Mathematik- und Physikaufgabensammlung*, Universität Bayreuth, http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/smart/wp/

[11] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag