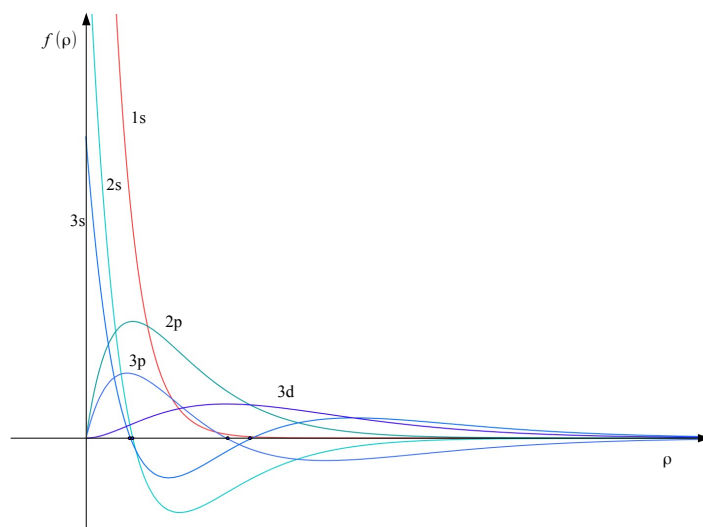


Partielle Differentialgleichungen

Eine Einführung in die Theorie
Linearer Partieller Differentialgleichungen

Dr. Jürgen Bolik

Technische Hochschule Nürnberg



Inhaltsverzeichnis

1	Banachräume und Distributionen	4
1.1	Funktionenräume	4
1.1.1	Stetige und differenzierbare Funktionen	4
1.1.2	Integrierbare Funktionen	6
1.1.3	Punktmengen im \mathbb{R}^n und Untermannigfaltigkeiten	9
1.1.4	Banach- und Hilberträume	12
1.1.5	Sobolev-Räume	13
1.2	Distributionen	16
1.3	Die Fouriertransformation	21
1.4	Integration über Untermannigfaltigkeiten	23
1.5	Integralsätze	27
1.5.1	Der Gaußsche Integralsatz	27
1.5.2	Der Stokessche Integralsatz im \mathbb{R}^3	32
1.5.3	Die Greenschen Formeln	32
1.6	Übungsaufgaben	33
2	Operatoren und Distributionslösungen	36
2.1	Kompakte Operatoren	36
2.2	Die Theorie von Riesz und Schauder	38
2.3	Die adjungierte Abbildung	40
2.4	Gewöhnliche Differentialoperatoren	47
2.5	Fredholm-Operatoren	58
2.6	Distributionslösungen linearer partieller Differentialgleichungen	60
2.6.1	Fundamentallösungen partieller Differentialgleichungen	60
2.6.2	Die Mittelwerteigenschaft und das Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen	62
2.6.3	Die Poisson-Gleichung und das Newton-Potential	64
2.6.4	Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung	67
2.6.5	Fundamentallösung der Wellengleichung	68
2.7	Übungsaufgaben	69
3	Rand- und Anfangswertprobleme	76
3.1	Elliptische Differentialoperatoren und elliptische Randwertprobleme	76
3.1.1	Das Dirichlet- und das Neumann-Problem für den Laplace-Operator	76
3.1.2	Elliptische Randwertprobleme	83
3.2	Zerlegungssätze	85
3.3	Hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen	86
3.3.1	Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung	86
3.3.2	Das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung	87
3.3.3	Rand-Anfangswertprobleme für hyperbolische Differentialgleichungen	90
3.3.4	Rand-Anfangswertprobleme für parabolische Differentialgleichungen	98

3.4	Übungsaufgaben	99
-----	--------------------------	----

4 Lineare partielle Differentialgleichungen in der Elektrodynamik und Quantenmechanik 104

4.1	Die Maxwell-Gleichungen	104
4.1.1	Physikalische Grundlagen	104
4.1.2	Randwert- und Anfangswertprobleme	109
4.2	Die Schrödinger-Gleichung	118
4.2.1	Physikalische Grundlagen	118
4.2.2	Lösungstheorie	120
4.3	Die Dirac-Gleichung	128
4.4	Die Klein-Gordon-Gleichung	132
4.4.1	Physikalische Grundlagen	132
4.4.2	Lösungstheorie	134
4.5	Übungsaufgaben	135

1 Banachräume und Distributionen

1.1 Funktionenräume

Sei α ein Multiindex, wobei

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n, \alpha_i \geq 0, |\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

und

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wir schreiben auch

$$D^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x)$$

mit

$$\partial_i^{\alpha_i} f(x) := \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} f(x).$$

1.1.1 Stetige und differenzierbare Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist stetig}\},$$

$$C^k(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\},$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Die Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

wird als *Träger* von f bezeichnet. Damit definieren wir

$$C_0^0(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega\}$$

und

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_0^0(\Omega) \text{ für } k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Beispiel

Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

gehört zu $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ferner sei

$$C^0(\bar{\Omega}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist auf } \bar{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\},$$

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid D^\alpha f \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Für auf einer Menge S definierte beschränkte Funktionen $g : S \rightarrow \mathbb{K}$ sei

$$\|g\|_{\sup} := \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Der Raum $C^k(\bar{\Omega})$ ist, für eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mit der Norm

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{\sup}$$

ein Banachraum.

Hölder-Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge und $s \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$s = [s] + \{s\},$$

wobei $[s] \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \{s\} < 1$. Ferner sei

$$C^s(\bar{\Omega}) := \{f \in C^{[s]}(\bar{\Omega}) \mid \|f\|_{C^s(\bar{\Omega})} := \|f\|_{C^{[s]}(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} < \infty\}$$

Wir schreiben, mit $k := [s]$ und $\lambda := \{s\}$, auch $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ statt $C^s(\bar{\Omega})$.

Für $0 < s \leq 1$ heißt

$$\text{höl}_s(f, \bar{\Omega}) := \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

Hölder-Konstante von f auf $\bar{\Omega}$ und

$$\text{lip}(f, \bar{\Omega}) := \text{höl}_1(f, \bar{\Omega})$$

Lipschitz-Konstante.

1.1.2 Integrierbare Funktionen

Es sei (M, \mathcal{B}, μ) ein Maßraum und $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ eine μ -messbare Funktion. Ferner sei

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_M |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in M \setminus N} |f(x)| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

und für $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p(\mu) := \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } \mu\text{-messbar und } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Da auch eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, gibt es eine μ -Nullmenge N , so dass

$$\sup_{x \in M \setminus N} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty}.$$

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so nennen wir eine Funktion f *lokal integrierbar* hinsichtlich Ω und schreiben $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, falls $f|_K \in L^1(K)$ für alle Kompakta $K \subset \Omega$ ist.

Lemma 1.1 Hölder-Ungleichung

Sei $1 \leq p, p' \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ist $f \in L^p(\mu)$ und $g \in L^{p'}(\mu)$, so ist $fg \in L^1(\mu)$ und es gilt

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}. \quad (1.1)$$

Beweis: Das Produkt fg ist messbar. Für $p = 1$ ist $p' = \infty$. Da

$$|(fg)(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} |f(x)| \quad \text{für fast alle } x,$$

ist $fg \in L^1(\mu)$. Die Aussage für den Fall $p = \infty$ lässt sich ebenso zeigen. Weiterhin ist die Aussage für die Fälle $\|f\|_{L^p} = 0$ oder $\|g\|_{L^{p'}} = 0$ klar.

Demnach beschränken wir uns nun auf $1 < p < \infty$, $\|f\|_{L^p} > 0$ und $\|g\|_{L^{p'}} > 0$. Für $a, b \geq 0$ gilt die *Youngsche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Diese lässt sich, wiederum für $a > 0, b > 0$, mittels

$$\log(ab) = \log a + \log b = \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'}$$

und, wegen der Konkavität des Logarithmus, mit

$$\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right)$$

herleiten.

Setzen wir nun

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}},$$

so erhalten wir

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}.$$

Zumal die rechte Seite integrierbar ist, folgt hieraus, dass $fg \in L^1(\mu)$ ist. Schließlich ergibt sich

$$\frac{\int |f(x)g(x)| d\mu}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f(x)|^p d\mu}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{\int |g(x)|^{p'} d\mu}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

□

Lemma 1.2 Minkowski-Ungleichung

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Sind $f, g \in L^p(\mu)$, so ist $f + g \in L^p(\mu)$ und es gilt

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad (1.2)$$

Beweis: Für $p = 1$ und $p = \infty$ folgt dies aus der punktweisen Dreiecksungleichung. Weiterhin gilt, für $1 < p < \infty$,

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

und demnach $f + g \in L^p(\mu)$.

Diese Ungleichung lässt sich folgendermaßen zeigen:

Da $h(x) = x^p$ für $p > 1$ konvex über \mathbb{R}_+ ist, gilt

$$\left| \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \right|^p \leq \left| \frac{1}{2}f \right|^p + \left| \frac{1}{2}g \right|^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p$$

und demnach

$$|f + g|^p \leq \frac{1}{2}|2f|^p + \frac{1}{2}|2g|^p = 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p.$$

Außerdem gilt

$$|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Ferner sind $|f|, |g| \in L^p(\mu)$ und, mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$|f + g|^{p-1} \in L^{p'}(\mu)$. Demnach erhalten wir, gemäß der Hölder-Ungleichung,

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p d\mu &\leq \|f\|_{L^p} \| |f + g|^{p-1} \|_{L^{p'}} + \|g\|_{L^p} \| |f + g|^{p-1} \|_{L^{p'}} = \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

□

Seien $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass $g(\cdot)f(x - \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x - y)| dy \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Dann bezeichnen wir $f * g$ als Faltung (=Konvolution) von f und g . Es gilt

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy =: (g * f)(x). \quad (1.3)$$

Definition 1.3 Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1.$$

Weiterhin sei $\epsilon > 0$ und

$$\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann heißt (φ_ϵ) Dirac-Folge zu φ .

Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, setzen wir

$$f_\epsilon(x) := (f * \varphi_\epsilon)(x) = \int_{|x-y| \leq \epsilon} f(y) \varphi_\epsilon(x-y) dy$$

Beispiel

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := \begin{cases} c \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

und einer Konstanten c . Dabei werde c so gewählt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{|x| \leq 1} \varphi(x) dx = 1.$$

Dann ist (φ_ϵ) eine Dirac-Folge.

Satz 1.4 Sei $1 \leq p < \infty$.

a) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und (φ_ϵ) eine Diracfolge, so gilt $f_\epsilon := f * \varphi_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f - f_\epsilon\|_{L^p} = 0.$$

b) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht $L^p(\Omega)$.

1.1.3 Punktmengen im \mathbb{R}^n und Untermannigfaltigkeiten

Partition der Eins

Wir bezeichnen $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ als Überdeckung von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, falls

$$\Omega \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

- (i) Die Überdeckung heißt *lokal finit*, falls zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung $\overline{B_\epsilon(x)}$ existiert, so dass

$$\{i \in \mathbb{N} \mid U_i \cap \overline{B_\epsilon(x)} \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

- (ii) Sind U_i offene Mengen, so wird die Überdeckung als *offene Überdeckung* bezeichnet.
- (iii) Wir nennen $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *Partition der Eins*, oder *Zerlegung der Eins*, auf Ω zu einer lokal finiten offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, falls

$$\eta_i \in C_0^\infty(U_i), \quad \eta_i \geq 0, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i = 1 \text{ auf } \Omega.$$

Beispiel einer Teilung der Eins

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-t^2}) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1 \end{cases}$$

und

$$G(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t - k).$$

Es gilt $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $G \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$G(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

und

$$G(t) = G(t - k) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Weiterhin sei

$$h(t) := \frac{g(t)}{G(t)} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für diese Funktion gilt $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } h = [-1, 1]$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t - k) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Mit $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\epsilon > 0$ erhalten wir eine Funktion

$$\eta_{p\epsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_{p\epsilon}(x) = \prod_{l=1}^n h\left(\frac{x_l}{\epsilon} - p_l\right). \quad (1.4)$$

Es gilt $\eta_{p\epsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \eta_{p\epsilon}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\text{supp } \eta_{p\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_l - p_l\epsilon| \leq \epsilon \text{ für } l = 1, \dots, n\}.$$

Kompakta mit glattem Rand

Definition 1.5 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann wird K als *glatt oder C^1 -berandet* bezeichnet, falls es zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi \in C^1(U)$ gibt, so dass

$$(i) \quad K \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\},$$

$$(ii) \quad \text{grad } \psi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U.$$

Es läßt sich zeigen, dass dann

$$\partial K \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}$$

gilt. Demnach ist der Rand eines Kompaktums $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$ ein Punkt, so schreiben wir $T_{x_0}M$ für die Menge aller Tangentialvektoren an M in x_0 .

Lemma 1.6 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -berandetes Kompaktum. Dann existiert genau ein Vektor $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \nu(x_0) \text{ steht senkrecht auf } T_{x_0}(\partial K),$$

$$(ii) \quad \|\nu(x_0)\| = 1,$$

$$(iii) \quad \text{Es gibt ein } \epsilon > 0, \text{ so dass}$$

$$x_0 + t\nu(a) \notin K \text{ für alle } t \in (0, \epsilon). \quad (1.5)$$

Ein Vektor $\nu(x_0)$ mit diesen Eigenschaften wird als *äußerer Normalen-Einheitsvektor* von K im Punkt x_0 bezeichnet.

1.1.4 Banach- und Hilberträume

Der Raum $L^\infty(\mu)$ und, wie der Satz von Fischer-Riesz zeigt, die Räume $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, sind vollständig.

Ein normierter Raum, der vollständig hinsichtlich der induzierten Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ ist, heißt *Banachraum*.

Ist X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ eine *Sesquilinearform*, dann wird (\cdot, \cdot) *Skalarprodukt* genannt, wenn die Sesquilinearform positiv definit ist. Falls (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt ist, wird $(X, (\cdot, \cdot))$ *Prä-Hilbertraum* genannt. Mittels $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ist auf einem Prä-Hilbertraum eine Norm definiert.

Ist $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Prä-Hilbertraum und der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$, mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$, vollständig hinsichtlich der induzierten Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$, so ist X ein *Hilbertraum*.

1.1.5 Sobolev-Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f^{(\alpha)} \in L^1_{loc}(\Omega)$ nennen wir *Distributionsableitung* (oder schwache Ableitung) D^α von f , wenn

$$\int_{\Omega} f^{(\alpha)} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.6)$$

gilt.

Definition 1.7 Sei $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann sei verstehen wir unter dem Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \text{ existiert und ist in } L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

und unter der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ferner sei

$$H^{k,p}(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$$

und

$$H_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt (bogenweise) zusammenhängend, wenn je zwei Punkte $a, b \in U$ durch eine Kurve verbunden werden können. Unter einem Gebiet Ω wird eine offene zusammenhängende Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verstanden.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, C^1 -berandetes Gebiet. Dann sei

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{f \in W^{1,p}(\Omega) \mid f|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Dabei werden die Randwerte als Grenzwert in $L^p(\partial\Omega)$ gemäß Satz 1.8 verstanden. Es gilt dann außerdem $W_0^{1,p}(\Omega) = H_0^{1,p}(\Omega)$.

Satz 1.8 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, C^1 -berandetes Gebiet. Dann gibt es eine Konstante c , so dass

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ für alle } f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (1.7)$$

gilt. Nun sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in W^{1,p}$. Nach (1.7) gibt es $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $f_j \rightarrow f$ in $W^{1,p}(\Omega)$ und einem Grenzwert in $L^p(\partial\Omega)$. Diesen Grenzwert bezeichnen wir ebenfalls mit f und bezeichnen ihn als Randwert von f in $W^{1,p}(\Omega)$. Außerdem existiert eine Konstanten c , so dass

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ für alle } f \in W^{1,p}(\Omega) \quad (1.8)$$

gilt.

Anmerkung

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Ferner sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten den Raum

$$X := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_X < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_X := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$$

und die Vervollständigung von X hinsichtlich $\|\cdot\|_X$,

$$\overline{X}^{\|\cdot\|_X}.$$

Ist $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \overline{X}^{\|\cdot\|_X}$ Cauchy-Folge, dann ist $(\partial^\alpha f_j)_j$ Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)$ mit

$$\partial^\alpha f_j \longrightarrow f^{(\alpha)} \text{ in } L^p(\Omega).$$

In [40] wird gezeigt, dass, für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$,

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$$

gilt.

Beispiele

(i) Sei

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|.$$

Dann gilt $f \in W^{1,2}((-1, 1))$.(ii) Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \frac{1}{2}\}$ und

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln \ln \frac{1}{|x|}.$$

Dann gilt $f \in W^{1,2}(\Omega)$.Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Dann wird zu einem Sobolev-Raum $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, wird die Zahl

$$m - \frac{n}{p}$$

als *Sobolev-Zahl* bezeichnet.

Zu den Einbettungssätzen von Sobolev- in Hölderräumen gehört die folgende Aussage:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit einem Lipschitz-Rand $\partial\Omega$. Ist

$$m - \frac{n}{p} = k + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

so existiert die Einbettung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$$

und ist stetig. Demnach existiert zu $u \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Funktion aus $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, die f. ü. mit u übereinstimmt,¹ so dass eine Konstante $C = C(\Omega, n, m, p, k, \alpha)$ existiert mit

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

¹Diese wird hier ebenfalls als Funktion u bezeichnet

1.2 Distributionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$$

und $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{D}$. Wir schreiben

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi,$$

falls

(i) ein Kompaktum $K \subset \Omega$ existiert, so dass

$$\text{supp}(\varphi_j) \subset K \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_0,$$

$$\text{supp}(\varphi) \subset K$$

und

(ii) die Folge $(D^\alpha \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ für $j \rightarrow \infty$, für alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha_i \geq 0$, gleichmäßig auf K gegen $D^\alpha \varphi$ konvergiert.

Definition 1.9 Eine Distribution ist eine stetige lineare Abbildung

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}, \varphi \mapsto T(\varphi),$$

wobei

a) die Linearität

$$T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi) \text{ für } \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

b) und die Stetigkeit

$$T(\varphi_j) \rightarrow T(\varphi) \text{ für } \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$$

bedeutet.

Die Gesamtheit der Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Für Distributionen T_1, T_2 schreiben wir $T_1 = T_2$, wenn

$$T_1(\varphi) = T_2(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Unter dem Träger einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verstehen wir die Menge aller Punkte $x \in \bar{\Omega}$, für welche die Einschränkung von T auf

$$\Omega \cap \{y \in \Omega \mid |y - x| < \delta\} \text{ für alle } \delta \in (0, \infty)$$

ungleich der Nulldistribution ist.

Definition 1.10 Als $\mathcal{E}'(\Omega)$ wird die Gesamtheit der Distributionen aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit beschränktem Träger in Ω bezeichnet.

Definition 1.11 Unter $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ verstehen wir den Raum der Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die der Bedingung

$$\|\varphi\|_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k + 1) \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad (1.9)$$

genügen. Mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|_{k,l}$ schreiben wir

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi,$$

falls

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{k,l} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

gilt.

Die Gesamtheit der stetigen lineare Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird Raum der *temperierten Distributionen* genannt.

Eine Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt *regulär*, wenn ein $f \in L^1_{loc}$ existiert, so dass

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.10)$$

Distributionen, die nicht regulär sind, werden *singulär* genannt.

Es gilt

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Beispiele

(i) Die durch

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

definierte δ -Distribution ist singulär.

(ii) Sei

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann gilt $f \in L_{loc}^1((0, 1))$ und T_f nach (1.10) ist eine reguläre Distribution.

Definition 1.12 Seien $T_j, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Dann bedeutet die Konvergenz der Folge $(T_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ gegen T in \mathcal{D}' , d. h.

$$T_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

dass

$$T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

*Beispiel*Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = 1$$

und für $\epsilon > 0$ sei

$$f_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

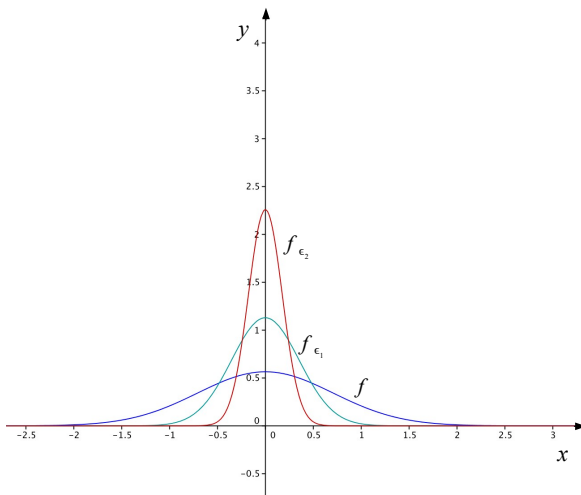


Abbildung 1.1 Funktionen f_ϵ für verschiedene ϵ

Weiterhin sei durch T_f eine reguläre Distribution erklärt. Dann gilt

$$T_{f_\epsilon} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0 \quad \text{für } \epsilon \searrow 0,$$

d. h.

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x) \varphi(x) d^n x = \delta_0(\varphi) = \varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Definition 1.13 Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sind Differentiation und Multiplikation mit einer Funktion $f \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert durch

$$(D^\alpha T)(\varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi(x))$$

und

$$(fT)(\varphi) = (f(x)T)(\varphi) = T(f(x)\varphi(x)).$$

Die Addition zweier Distributionen $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist durch

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\varphi) = \lambda_1 T_1(\varphi) + \lambda_2 T_2(\varphi), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},$$

erklärt.

Faltung von Distributionen

Seien $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass $g(\cdot)f(x - \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x - y)| dy \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(\xi - y) dy \right) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x + y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy = (f(x) \otimes g(y), \varphi(x + y)). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $\eta|_M = 1$ für eine offene Menge M , die $\text{supp } g$ enthält. Dann wird die Faltung $f * g$ zweier Distributionen $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mittels

$$(f * g, \varphi) := (f(x) \otimes g(y), \eta(y) \varphi(x + y)), \quad \text{mit } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

definiert. Dabei schreiben wir für ein Funktional f auch, wie hier (f, φ) statt $f(\varphi)$.

1.3 Die Fouriertransformation

Im folgenden Abschnitt wird die Fouriertransformation für Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Distributionen aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und für Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 1.14 Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$(F\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \varphi(x) dx. \quad (1.13)$$

$F\varphi$ wird die Fouriertransformierte der Funktion φ genannt. Es gilt

$$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$D^\alpha(F\varphi) = (-i)^{|\alpha|} F(x^\alpha \varphi), \quad (1.14)$$

$$\xi^\alpha F\varphi = (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha \varphi). \quad (1.15)$$

Die Konvergenz

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$$

impliziert

$$F\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} F\varphi.$$

Ferner ist F bijektiv und

$$(F^{-1}\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.16)$$

Satz 1.15 Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und

$$(FT)(\varphi) := T(F\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (1.17)$$

$$(F^{-1}T)(\varphi) := T(F^{-1}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.18)$$

Dann ist

$$F : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

bijektiv und

$$F^{-1}FT = FF^{-1}T = T, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.19)$$

Mit T gehören auch $x^\alpha T$ und $D^\alpha T$ zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$F(D^\alpha T) = i^{|\alpha|} x^\alpha FT \quad (1.20)$$

sowie

$$F(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} D^\alpha (FT). \quad (1.21)$$

Die Fouriertransformation lässt sich auch auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren.

Satz 1.16 Die Fouriertransformation F und die inverse Fouriertransformation F^{-1} als lineare Operatoren in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besitzen jeweils eindeutige Fortsetzungen F und F^{-1} auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Zudem sind F und F^{-1} stetige, lineare, unitäre Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$FF^{-1}f = F^{-1}Ff = f \quad \text{für } f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.22)$$

Anmerkung

Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $V : H_1 \rightarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann heißt V

(i) *isometrisch*, falls

$$\|Vx\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$$

gilt.

(ii) *unitär*, falls V isometrisch ist und $D(V) = H_1$ und $R(V) = H_2$ gilt.

1.4 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ferner gelte

$$M = \bigcup_{1 \leq j \leq m} V_j,$$

$T_j \subset \mathbb{R}^k$, $j = 1, \dots, m$ sei offen und

$$\varphi_j : T_j \rightarrow V_j \subset M, \quad j = 1, \dots, m,$$

seien Karten. Zu der Überdeckung $(V_j)_{1 \leq j \leq m}$ existiert eine untergeordnete, lokal-integrierbare Teilung der Eins $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq m}$, wobei

$$\alpha_j : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Unter g_j verstehen wir die Gramsche Determinante

$$g := \det(g_{\nu\mu})$$

bezüglich φ_j , wobei der Maßtensor $(g_{\nu\mu})$ aus Funktionen $g_{\nu\mu} : T \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq \nu, \mu \leq k$ mit

$$g_{\nu\mu}(t) := \left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_\nu}, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_\mu} \right)$$

besteht.

Beispiel

Um den Maßtensor $(g_{\nu\mu})$ für räumliche Polarkoordinaten zu bestimmen, definieren wir für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Halbebene

$$H_\alpha := \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) \mid r \in \mathbb{R}_+^*, z \in \mathbb{R}\}$$

und die Punktmengen

$$T := \mathbb{R}^3 \setminus H_\alpha$$

und

$$V := \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \vartheta < \pi, \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha\}.$$

Mittels

$$\phi : T \rightarrow V, \quad (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$$

erhalten wir für die Funktionalmatrix

$$D\phi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Zumal

$$(g_{\nu\mu}) = (D\phi)^t(D\phi),$$

folgt, mit

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix},$$

dass

$$\sqrt{g} = r^2 \sin \vartheta.$$

Definition 1.17 Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M , falls $f|_{V_j}$, $j = 1, \dots, m$, integrierbar ist, was wiederum bedeutet, dass

$$t \mapsto f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

über T_j integrierbar ist. Mit

$$\int_M f(x) d\omega_x = \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j(x) f(x) d\omega_x \tag{1.23}$$

und

$$\int_M \alpha_j(x) f(x) d\omega_x := \int_{T_j} \alpha_j(\varphi_j(t)) f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)} d^k t \tag{1.24}$$

ist die Integration von f über M erklärt.

Im Rahmen der Potentialtheorie tritt die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel auf. Daher sollen nun einige Begriffe und Ergebnisse zu diesem Thema zusammengefasst werden.

Volumen und Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel

Sei $n \geq 2$, $K_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ die n -dimensionale Einheitskugel und $S_{n-1} = \partial K_n$ die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre. Für das Volumen τ_n von K_n gilt nach dem Cavalierischen Prinzip

$$\tau_n = \tau_{n-1} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Statt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

können wir auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

betrachten. Für

$$c_m := 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx, \quad m \in \mathbb{N},$$

gilt

$$c_0 = \pi, \quad c_1 = 2 \quad \text{und} \quad c_m = \frac{m-1}{m} c_{m-2} \quad \text{für } m \geq 2.$$

Somit erhalten wir

$$c_{2k} = \pi \prod_{m=1}^k \frac{2m-1}{2m},$$

$$c_{2k+1} = 2 \prod_{m=1}^k \frac{2m}{2m+1}$$

und folglich

$$c_{n-1} c_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Wegen

$$\tau_n = \tau_{n-1} \cdot c_n$$

ergibt sich daher die Rekursionsformel

$$\tau_n = \frac{2\pi}{n} \tau_{n-2}.$$

Mit Hilfe der Gamma-Funktion lässt sich auch

$$\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

schreiben. Die Oberfläche ω_n der Einheitskugel ist definiert durch

$$\omega_n := \text{Vol}_{n-1}(S_{n-1}).$$

Es gilt

$$\tau_n = \int_{|x| \leq 1} d^n x = \int_0^1 \left(\int_{|x|=r} d\omega_x \right) dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n}$$

und demnach

$$\omega_n = n\tau_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

1.5 Integralsätze

Unter $K \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand und unter $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ die äußere Einheits-Normale.

1.5.1 Der Gaußsche Integralsatz

Interpretation des Gaußschen Integralsatzes

Der im Gaußschen Integralsatz dargestellte Zusammenhang lässt sich für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^3$ folgendermaßen veranschaulichen:

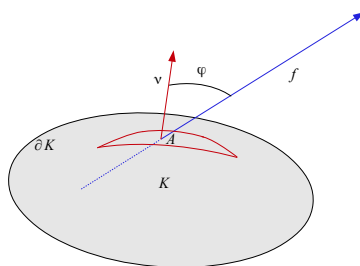


Abbildung 1.2 Feldlinie und Oberfläche

Das Oberflächenintegral des Vektorfeldes f

$$\int_A (f_{x_1} \cos(\nu, x_1) + f_{x_2} \cos(\nu, x_2) + f_{x_3} \cos(\nu, x_3)) d\omega_x$$

wird der *Fluss* des Vektors f durch die Fläche A genannt.

Statt dieses Oberflächenintegrals des Vektorfeldes f schreiben wir auch

$$\int_A (f(x), \nu(x)) d\omega_x = \int_A f_\nu(x) d\omega_x.$$

Sei $f = f_{x_3}$. Sind f_1 und f_2 die Werte des Vektorfeldes auf dA_1 bzw. dA_2 , so erhalten wir

$$f_1 \cos(\nu_1, x_3) dA_1 + f_2 \cos(\nu_2, x_3) dA_2 = (f_1 - f_2) dx_1 dx_2,$$

da $\angle(\nu_1, x_3) = \varphi_1$ und $\angle(\nu_2, x_3) = \pi - \varphi_1$ ist.

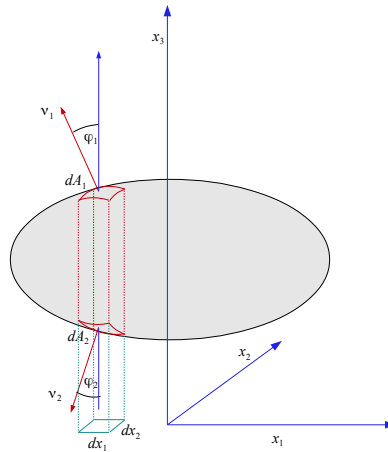


Abbildung 1.3 Querschnitt

Zumal

$$f_1 - f_2 = \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} dx_3$$

gilt, folgt

$$\oint f \cos(\nu, x_3) d\omega_x = \int \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} d^3x.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_K \operatorname{div} f(x) d^3x = \int_{\partial K} (f(x), \nu(x)) d\omega_x.$$

Dabei ist die Divergenz div gegeben durch

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{x_3}}{\partial x_3}.$$

Demnach ist die Gesamttergiebigkeit der in K vorhandenen Quellen, gegeben durch

$$\int_K \operatorname{div} f(x) d^3x,$$

gleich dem Überschuss

$$\int_{\partial K} f_\nu(x) d\omega_x.$$

Herleitung des Gaußschen Integralsatzes

Lemma 1.18 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Ist $f \in C_0^1(U)$, dann gilt

$$\int_U \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n. \quad (1.25)$$

(ii) Sind $f \in C^1(U)$ und $g \in C_0^1(U)$, dann gilt

$$\int_U \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) d^n x = - \int_U f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} d^n x \quad \text{für } 1 \leq i \leq n. \quad (1.26)$$

Beweis: Da $fg \in C_0^1(U)$ und

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

gilt, folgt die Aussage (ii) aus (i).

Setzen wir die Funktion f in Aussage (i) durch 0 auf \mathbb{R}^n fort, wählen $i = 1$ und ein $R \in \mathbb{R}_+^*$ so, dass

$$\text{supp } f \subset [-R, R]^n,$$

so erhalten wir, für ein festes $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) dx_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{x_1=-R}^{x_1=R} = 0$$

und demnach

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

□

Lemma 1.19 Sei $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ferner sei

$$g : U' \rightarrow I$$

eine Funktion mit $g \in C^1(U')$,

$$A := \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x')\},$$

und

$$B := \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n = g(x')\}.$$

Ist $f : U' \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion aus $C_0^1(U' \times I)$, dann gilt

$$\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x = \int_B f(x) \nu_i(x) d\omega_x, \quad (1.27)$$

wobei

$$\nu_i(x) = -(1 + |\text{grad } g(x')|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g(x')}{\partial x_i} \text{ für } 1 \leq i \leq n-1,$$

$$\nu_n = (1 + |\text{grad } g(x')|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Satz 1.20 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiterhin sei $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge mit einem Rand ∂K der Klasse C^1 und $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld. Dann gilt

$$\int_K \text{div } f(x) d^n x = \int_{\partial K} (f(x), \nu(x)) d\omega_x. \quad (1.28)$$

Beweis: Da K kompakt ist, existiert zu jeder offenen Überdeckung von K ,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

mit offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, eine endliche Teilüberdeckung.

Entweder ist

$$U_i \subset K \setminus \partial K$$

oder wir können

$$U_i = U' \times (a, b), \text{ mit einer offenen Menge } U' \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

schreiben, wobei

$$g : U' \rightarrow (a, b)$$

mit

$$U_i \cap K = \{(x', x_n) \in U' \times (a, b) \mid x_n \leq g(x') \text{ bzw. } x_n \geq g(x')\}.$$

Wie sich leicht zeigen lässt, existiert eine Zahl $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $V \subset K \neq \emptyset$ vollständig in einem U_i enthalten ist.

Sei

$$\epsilon := \frac{\lambda}{2} \sqrt{n}$$

und $(a_{p\epsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ die in (1.4) beschriebene Teilung der Eins.

Ferner sei P die endliche Menge aller Multiindizes $p \in \mathbb{Z}^n$, so dass

$$\text{supp}(\eta_{p\epsilon}) \cap K \neq \emptyset.$$

Dann gilt

$$\int_K \text{div } f(x) d^n x = \sum_{p \in P} \int_K \text{div } (\eta_{p\epsilon} f(x)) d^n x \quad (1.29)$$

und

$$\int_{\partial K} (f(x), \nu(x)) d\omega_x = \sum_{p \in P} \int_{\partial K} (\eta_{p\epsilon} f(x), \nu(x)) d\omega_x. \quad (1.30)$$

Demnach muss noch

$$\int_K \text{div } (\eta_{p\epsilon} f(x)) d^n x = \int_{\partial K} (\eta_{p\epsilon} f(x), \nu(x)) d\omega_x \quad (1.31)$$

bewiesen werden.

Ist $U_i \subset K \setminus \partial K$, so folgt die Aussage aus Lemma 1.18, sonst aus Lemma 1.19.

□

1.5.2 Der Stokessche Integralsatz im \mathbb{R}^3

Satz 1.21 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiterhin sei $M \subset U$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, die durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientiert sei. Es sei $K \subset M$ ein Kompaktum mit einem Rand ∂K der Klasse C^1 und

$$\tau : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein Einheits-Tangentialfeld, wobei $\tau(p)$ für alle $p \in K$ eine positiv orientierte Basis des Tangentialraums $T_p(\partial K)$ bildet. Dann gilt

$$\int_{\partial K} (f, \tau) ds = \int_K (\operatorname{rot} f, \nu) d\omega. \quad (1.32)$$

1.5.3 Die Greenschen Formeln

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, für welches der Gaußsche Integralsatz gilt. Ferner seien $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Wie sich mittels

$$f = vDu, \quad w := Du = \operatorname{grad} u$$

und

$$\operatorname{div}(vw) = v \operatorname{div} w + (w, \operatorname{grad} v)$$

herleiten lässt, gelten dann

(i) die *erste Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\Omega} (Du, Dv) \, dx = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\omega_x \quad (1.33)$$

und

(ii) die *zweite Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\omega_x. \quad (1.34)$$

1.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 < p < \infty$. Ferner sei

$$C_{1,p}^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid u \in L^p(\Omega), \partial_i u \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n\}$$

und für $u \in C_{1,p}^\infty(\Omega)$ sei

$$\|u\|_{1,p} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{1,p}$ eine Norm auf $C_{1,p}^\infty(\Omega)$ ist.
- b) Es sei $(u_k) \subset C_{1,p}^\infty(\Omega)$ eine Cauchy-Folge bzgl. der $\|\cdot\|_{1,p}$ -Norm. Zeigen Sie, dass genau ein $u \in L^p(\Omega)$ und genau ein $f^{(i)} \in L^p(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, existieren, so dass

$$\|u - u_k\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \|f^{(i)} - \partial_i u_k\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

und

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f^{(i)} \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt. Wir setzen $\partial_i u := f^{(i)}$ und nennen $\partial_i u$ die Distributionsableitung von u .

- c) Zeigen Sie, dass wenn diese Gleichung zur partiellen Integration mit $u, f^{(i)} \in L^p(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, so ist $f^{(i)}$, im Sinne von $L^p(\Omega)$, eindeutig bestimmt.
- d) Es sei

$$H^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{zu } u \text{ existiert eine Folge } (u_k) \subset C_{1,p}^\infty(\Omega) \text{ mit}$$

$$\|u - u_k\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ und } \|u_k - u_l\|_{1,p} \rightarrow 0 \text{ für } k, l \rightarrow \infty\}$$

und

$$\partial_i u = (L^p-) \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_i u_k \quad \text{für } u \in H^{1,p}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $H^{1,p}(\Omega)$ mit der $\|\cdot\|_{1,p}$ -Norm vollständig ist.

Aufgabe 2

Sei

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit

$$(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v).$$

Ferner sei \mathcal{F} die durch ϕ gegebene orientierte Fläche, wobei die Orientierung so gewählt ist, dass der Normalenvektor $\nu_{\mathcal{F}}$ im Punkt $(0, 0, 1)$ die Richtung der positiven z -Achse hat. Weiterhin sei

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } (x, y, z) \mapsto w(x, y, z) = (y, x^2, x^2 + y^2).$$

Zeigen Sie, dass das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} (\operatorname{rot} w, \nu_{\mathcal{F}}) d\omega$$

existiert und berechnen Sie dessen Wert.

Aufgabe 3

Gegeben seien das Kugelsegment

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4, z > 1\}$$

und das Vektorfeld

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto V(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂G . Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} (V, \nu) d\omega.$$

Aufgabe 4

Sei $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Ferner sei

$$\|f\|_{0,q} := \|f\|_{L^q(G)}$$

und

$$H^{k,q}(G) := \{u \in L^q(G) \mid \text{zu } u \exists (u_n) \subset C^k(G) \text{ mit}$$

$$D^\alpha u_n \in L^q(G) \text{ für } |\alpha| \leq k, n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \|u - u_n\|_{0,q} \longrightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) und}$$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{0,q} \longrightarrow 0 \text{ (} n, m \rightarrow \infty \text{)}\}.$$

Zeigen Sie:

- a) Ist $u \in H^{k,q}(G)$, so gibt es zu jedem α mit $|\alpha| \leq k$ genau ein $u_\alpha \in L^q(G)$ mit

$$\|u_\alpha - D^\alpha u_n\|_{0,q} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für diese u_α gilt:

$$(*) \quad \int_G u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G u_\alpha \phi \, dx \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(G).$$

- b) Ist $u \in C^k(G)$ mit $D^\alpha u \in L^q(G)$ für $|\alpha| \leq k$, so ist $u \in H^{k,q}(G)$ und $(*)$ gilt mit $u_\alpha = D^\alpha u$.

- c) Sei für $u \in H^{k,q}(G)$

$$\|u\|_{k,q} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{0,q}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

mit $D^\alpha u := u_\alpha$.

Bemerkung: u_α heißt (starke) D^α -Ableitung von u (aus $L^q(G)$).

Zeigen Sie, dass hierdurch eine Norm erklärt ist, mit der $H^{k,q}(G)$ vollständig ist.

- d) Sei $G := [-1, 1]$, $k = 1$ und $1 \leq q < \infty$. Zeigen Sie, dass mit $u(x) := |x|$ für $x \in G$

$$u \in H^{1,q}(G) \quad \text{und} \quad u'(x) = \operatorname{sgn} x \text{ f.ü.}$$

gilt.

Hinweis: Für $\epsilon > 0$ sei $u^{(\epsilon)} := \sqrt{u^2 + \epsilon} - \sqrt{\epsilon}$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Funktionen:

- a) Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto e^{-x} \chi_{[0,r]}$$

und $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- b) Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x^2 \chi_{[0,1]}.$$

2 Operatoren und Distributionslösungen

2.1 Kompakte Operatoren

Sind X, Y normierte \mathbb{K} -Vektorräume, so schreiben wir

$$L(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist stetig und linear}\}. \quad (2.1)$$

Außerdem setzen wir

$$L(X) := L(X, X). \quad (2.2)$$

Weiterhin ist für $T \in L(X, Y)$ der *Nullraum* von T durch

$$N(T) := \{x \in X \mid Tx = 0\} \quad (2.3)$$

und der *Bildraum* von T durch

$$R(T) := \{Tx \in Y \mid x \in X\} \quad (2.4)$$

definiert.

Definition 2.1 Ein Operator heißt *kompakt*, wenn er zur Menge

$$K(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \mid \overline{T(B_1(0))} \text{ kompakt}\} \quad (2.5)$$

gehört.

Satz 2.2 Einbettungssatz der Sobolev-Räume $H_0^{m,p}$ in Hölder-Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei $m \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ und $0 \leq \alpha \leq 1$.

(i) Gilt

$$m - \frac{n}{p} = k + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

so gibt es zu $u \in H_0^{m,p}(\Omega)$ genau eine stetige Funktion² $u \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, welche fast überall mit u übereinstimmt, so dass

$$\|u\|_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\Omega, n, m, p, k, \alpha) \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}.$$

Demnach existiert die Einbettung

$$J : H_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$$

und ist stetig.

²hier ebenfalls als u bezeichnet

(ii) Gilt

$$m - \frac{n}{p} > k + \alpha,$$

so ist die Einbettung

$$J : H_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$$

kompakt.

Satz 2.3 Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren

Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ferner sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $1 < q < \infty$. Außerdem sei $K(.,.) : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{K}$ messbar mit

$$\|K\| := \left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Dann ist durch

$$Tf(x) := \int_{\Omega_2} K(x,y)f(y) dy$$

ein Operator mit

$$T \in K(L^p(\Omega_2), L^q(\Omega_1)) \quad \text{und} \quad \|T\| \leq \|K\|$$

erklärt.

2.2 Die Theorie von Riesz und Schauder

Definition 2.4 Es sei $T \in L(X)$. Dann verstehen wir unter der Resolventenmenge von T

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid N(\lambda I - T) = \{0\} \text{ und } R(\lambda I - T) = X\} \quad (2.6)$$

und dem Spektrum von T

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T). \quad (2.7)$$

Das Spektrum wiederum wird in das Punktspektrum

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}, \quad (2.8)$$

das kontinuierliche Spektrum

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda I - T) = \{0\} \text{ und } R(\lambda I - T) \neq X, \overline{R(\lambda I - T)} = X\} \quad (2.9)$$

und das Residualspektrum

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid N(\lambda I - T) = \{0\} \text{ und } \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\} \quad (2.10)$$

aufgeteilt.

Demnach ist $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $\lambda I - T : X \rightarrow X$ bijektiv ist. Wie sich leicht zeigen lässt, ist auch die Umkehrabbildung stetig. Folglich gilt

$$R(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1} \in L(X). \quad (2.11)$$

$R(\lambda; T)$ wird *Resolvente* von T genannt.

Ein $\lambda \in \sigma_p(T)$ wird *Eigenwert* und das zugehörige $x \in N(\lambda I - T)$ *Eigenvektor* und im Falle eines Funktionenraumes X auch *Eigenfunktion* genannt. Der Raum $N(\lambda I - T)$ heißt *Eigenraum* von T zum Eigenwert λ .

Anmerkungen

- (i) Ist $\dim X < \infty$, so gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
- (ii) Ist $\dim X = \infty$ und $T \in K(X)$, so gilt $0 \in \sigma(T)$.

Satz 2.5 Der Spektralsatz für kompakte Operatoren nach Riesz-Schauder

Sei $T \in K(X) := K(X, X)$. Dann gilt

(i) Die Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus abzählbar vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$n_\lambda := \max\{n \in \mathbb{N} \mid N((\lambda I - T)^{n-1}) \neq N((\lambda I - T)^n)\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \quad (2.12)$$

Ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, so gilt

$$n_\lambda < \infty. \quad (2.13)$$

Die Zahl n_λ wird Ordnung (oder Index) von λ oder Riesz-Zahl genannt.

(iii) Riesz-Zerlegung

Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt die direkte Zerlegung

$$X = N((\lambda I - T)^{n_\lambda}) \oplus R((\lambda I - T)^{n_\lambda}), \quad (2.14)$$

wobei

$$\dim N((\lambda I - T)^{n_\lambda}) < \infty. \quad (2.15)$$

Da

$$\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$$

gilt, folgt die *Fredholmsche Alternative*:

Satz 2.6 Ist $T \in K(X)$ und $\lambda \neq 0$, so

(i) ist entweder die Gleichung

$$\lambda x - Tx = y \text{ für alle } y \in X$$

eindeutig lösbar oder

(ii) die Gleichung

$$\lambda x - Tx = 0$$

hat nichttriviale Lösungen.

2.3 Die adjungierte Abbildung

Durch X' wird der Dualraum $L(X, \mathbb{R})$ des normierten Vektorraums X bezeichnet. Die Elemente von X' heißen lineare Funktionale.

Definition 2.7 Seien X, Y normierte Räume, $A \in L(X, Y)$ und

$$' : L(X, Y) \rightarrow L(Y', X').$$

Dann ist durch

$$(A'(y'))(x) := y'(A(x)), \text{ für } x \in X, y' \in Y', \quad (2.16)$$

der zu A adjungierte Operator (oder duale Operator) definiert.

Die Abbildung $'$ ist injektiv, linear und stetig (Einbettung). Ferner ist $'$ isometrisch.

Satz 2.8 Satz von Fredholm

Ist X Banachraum, $T \in K(X)$ und $\lambda \neq 0$, so besitzt das Gleichungssystem

$$\lambda x - Tx = y$$

genau dann eine Lösung $x \in X$, falls

$$x'(y) = 0 \text{ für alle } x' \in X'$$

für alle Lösungen $x' \in X'$ der homogenen adjungierten Gleichung

$$\lambda x' - T'x' = 0.$$

Im folgenden Abschnitt betrachten wir lineare Operatoren $A : H \rightarrow H$ in Hilberträumen H . Unter $D(A) \subset H$ verstehen wir jeweils dessen Definitionsbereich, unter $R(A)$ jeweils dessen Bildmenge (oder Bildraum). Die Hilbertraum-Adjungierte kann mit Hilfe des Riesz'schen Darstellungssatzes definiert werden.

Satz 2.9 Riesz'scher Darstellungssatz

Sei H ein Hilbertraum. Dann ist durch

$$J(x)(y) := \langle y, x \rangle \text{ für } x, y \in H \quad (2.17)$$

ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus

$$J : H \rightarrow H'$$

erklärt.

Setzen wir nun in Definition 2.7 voraus, dass X und Y Hilberträume sind, und

$$R_X : X \rightarrow X' \text{ sowie } R_Y : Y \rightarrow Y'$$

die Isometrien von Theorem 2.9 seien und A^* durch

$$A^* := R_X^{-1} A' R_Y$$

erklärt wird, dann ist $A^* \in L(Y, X)$ und

$$\langle x, A^* y \rangle_X = \langle Ax, y \rangle_Y \text{ für } x \in X, y \in Y. \quad (2.18)$$

Der adjungierte Operator A^* von A lässt sich auch für unbeschränkte Operatoren auf dichten Teilräumen $D(A)$ von Hilberträumen erklären:

Sind H_1 und H_2 Hilberträume,

$$A : D(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$$

und

$$B : D(B) \subset H_2 \rightarrow H_1,$$

dann bezeichnen wir B als *formal adjungiert* zu A (und vice versa), wenn

$$\langle g, Af \rangle = \langle Bg, f \rangle \text{ für alle } f \in D(A), g \in D(B). \quad (2.19)$$

Sei $g \in D(B)$ und

$$L_g f = \langle g, Af \rangle \text{ mit } D(L_g) = D(A). \quad (2.20)$$

Weiterhin sei $D(A)$ dicht. Das Funktional L_g ist stetig. L_g lässt sich eindeutig auf $H_1 = \overline{D(A)}$ fortsetzen und es existiert ein eindeutig bestimmtes $h_g \in H_1$ mit

$$\langle g, Af \rangle = L_g f = \langle h_g, f \rangle \text{ für alle } f \in D(A). \quad (2.21)$$

Sei

$$D^* = \{g \in H_2 \mid \text{das Funktional } f \mapsto \langle g, Af \rangle \text{ ist stetig auf } D(A)\} \quad (2.22)$$

$$= \{g \in H_2 \mid \text{es existiert ein } h_g \in H_1 \text{ mit } \langle h_g, f \rangle = \langle g, Af \rangle \text{ für alle } f \in D(A)\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass h_g eindeutig bestimmt ist und durch

$$D(A^*) := D^*, \quad A^* g := h_g \text{ für } g \in D(A^*) \quad (2.23)$$

ein linearer Operator

$$A^* : D(A^*) \subset H_2 \rightarrow H_1$$

definiert ist. Der Operator A^* wird *adjungierter Operator* genannt.

Ist H ein Hilbertraum und A ein Operator in H . Gilt

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle \quad \text{für alle } f, g \in D(A), \quad (2.24)$$

so wird A *hermitesch* genannt.

Sei H ein Prähilbertraum. Ein dicht definierter Operator A in H heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle \quad \text{für alle } f, g \in D(A). \quad (2.25)$$

Ein Operator A in einem Hilbertraum wird als *selbstadjungiert* bezeichnet, wenn A dicht definiert ist und $A = A^*$ gilt.

Die Poincaré-Ungleichung stellt einen Zusammenhang zwischen Normabschätzungen einer Funktion und jenen der Funktion her.

Satz 2.10 Poincaré-Ungleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weiterhin sei $1 \leq p < \infty$

a) Ferner sei $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, p, \Omega)$, so dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Df\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.26)$$

b) Außerdem sei Ω zusammenhängend und C^1 -berandet. Weiterhin sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, p, \Omega)$, so dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Df\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.27)$$

Unter sehr allgemeinen Bedingungen lässt sich mit Hilfe des Lax-Milgram-Theorems die Existenz schwacher Lösungen zahlreicher Randwertprobleme zeigen.

Satz 2.11 Lax-Milgram-Theorem

Sei H ein Hilbertraum und

$$b : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

eine Sesquilinearform mit

$$|b(f, g)| \leq C \|f\| \|g\| \quad \text{und} \quad b(f, f) \geq c \|f\|^2, \quad (2.28)$$

wobei $0 < c \leq C < \infty$. Dann existiert genau eine bijektive Abbildung $B \in L(H)$ mit

$$b(f, g) = (Bf, g)_H \quad \text{für alle } f, g \in H. \quad (2.29)$$

Dabei bezeichnet $(\cdot, \cdot)_H$ das Skalarprodukt des Hilbertraumes $(H, (\cdot, \cdot)_H)$. Außerdem gilt

$$\|B\| \leq C \quad \text{und} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}. \quad (2.30)$$

Definition 2.12 Ein Operator A mit $D(A) \subset H$ und $R(A) \subset H$ heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ die Eigenschaften

$$x_n \rightarrow x \quad \text{und} \quad Ax_n \rightarrow y$$

implizieren, dass

$$x \in D(A) \quad \text{und} \quad Ax = y.$$

Sei $A \in L(D(A) \subset H_1, H_2)$, ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_A := \langle f, g \rangle + \langle Af, Ag \rangle \quad \text{für alle } f, g \in D(A) \quad (2.31)$$

und die Graphennorm

$$\|f\|_A := (\|f\|^2 + \|Af\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

gegeben. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn $(D(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ ein Hilbertraum ist.

Definition 2.13 Sei H Hilbertraum und $D(B) \subset H$. Ein linearer Operator B heißt Fortsetzung des linearen Operators A , $B \supset A$, wenn

$$D(B) \supset D(A) \quad \text{und} \quad Bx = Ax \quad \text{für } x \in D(A) \quad (2.33)$$

gilt.

A heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen Operator B mit der Eigenschaft

$$B \supset A$$

gibt.

Ist ein linearer Operator A abschließbar, so gibt es eine eindeutig bestimmte minimale Erweiterung \bar{A} . Diese wird als *Abschluss* des Operators A bezeichnet. $D(\bar{A})$ ist der Abschluss von $D(A)$ in der Graphennorm $\|\cdot\|_A$ (siehe (2.32)), d. h.

$$D(\bar{A}) = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_A}.$$

Satz 2.14 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A : D(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) A und $D(A)$ sind abgeschlossen.
- (ii) A ist beschränkt und $D(A)$ ist abgeschlossen.
- (iii) A ist beschränkt und abgeschlossen.

Ein symmetrischer Operator A in einem Hilbertraum wird *wesentlich selbstadjungiert* genannt, wenn \bar{A} selbstadjungiert ist.

Satz 2.15 Sei H Hilbertraum und $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ein symmetrischer Operator.

- (i) Ist $D(A) = H$, so ist A selbstadjungiert und beschränkt.
- (ii) Existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass

$$R(A - \lambda E) = R(A - \bar{\lambda} E) = H,$$

so ist A selbstadjungiert.

- (iii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(A - \lambda E)^* = A^* - \bar{\lambda} E,$$

$$H = \overline{R(A - \lambda E)} \oplus N(A^* - \bar{\lambda} E)$$

und

$$\|Ax - \lambda x\| \geq |\operatorname{Im} \lambda| \cdot \|x\|, \quad x \in D(A).$$

Definition 2.16 Ein linearer, in einem Hilbertraum dicht definierter Operator A heißt (nach unten) halbbeschränkt, falls eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$(Ax, x) \geq c\|x\|^2 \quad \text{für } x \in D(A). \quad (2.34)$$

Definition 2.17 Sei A ein halbbeschränkter Operator, der Gleichung (2.34) genügt. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda + c > 0.$$

Dann setzen wir

$$[x, y]_\lambda := (Ax, y) + \lambda(x, y), \quad \text{für } x, y \in D(A), \quad (2.35)$$

und

$$\|x\|_\lambda := \sqrt{[x, x]_\lambda}, \quad \text{für } x \in D(A). \quad (2.36)$$

Weiterhin sei

$$H_\lambda := \{x \in H \mid \text{es existiert } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A), \text{ so dass} \quad (2.37)$$

$$x_n \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und } \|x_n - x_m\|_\lambda \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty \text{ gilt}\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass H_λ ein Hilbertraum und $D(A)$ eine in diesem Hilbertraum dichte Menge ist. Statt H_λ schreiben wir auch H_A , wenn wir statt der Norm $\|\cdot\|_\lambda$ den Raum mit der Klasse äquivalenter Normen ausstatten. Der Raum H_A wird als *energetischer Raum* bezeichnet.

Satz 2.18 Friedrichsche Erweiterung

Sei A ein halbbeschränkter Operator, der Gleichung (2.34) genügt und H_A sei der zugehörige energetische Raum. Dann ist A_F , mit

$$A_F x = A^* x, \quad D(A_F) = H_A \cap D(A^*), \quad (2.38)$$

eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators A und es gilt

$$(A_F x, x) \geq c \|x\|^2, \quad \text{für } x \in D(A_F), \quad (2.39)$$

wobei c die Konstante aus Gleichung (2.34) ist.

Satz 2.19 Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H . Dann gilt

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A).$$

und

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|].$$

Ist A außerdem kompakt, so gilt

$$\sigma_c(A) = \{0\}$$

und $\sigma_p(A)$ besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen Eigenwerten.

Ferner existiert ein orthonormiertes System $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_j und für jedes Element $x \in H$ lässt sich Ax durch

$$Ax = \sum_j \lambda_j (x, x_j) x_j \quad (2.40)$$

darstellen, wobei über die von Null verschiedenen λ_j summiert wird.

2.4 Gewöhnliche Differentialoperatoren

Satz 2.20 Der Hemitesche Differentialoperator

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion aus $C^0(\mathbb{R})$ mit

$$p(t) \geq 1 \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } p(t) \rightarrow \infty \text{ für } |t| \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Sei

$$A : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad x(t) \mapsto Ax(t) := -x''(t) + p(t)x(t). \quad (2.42)$$

Der Operator A ist in $L^2(\mathbb{R})$ positiv definit, symmetrisch und wesentlich selbstadjungiert. Weiterhin gilt

$$\sigma(\bar{A}) = \sigma_p(\bar{A}). \quad (2.43)$$

Ist $p(t) = t^2$, dann sind die Eigenwerte von \bar{A}

$$\lambda_n = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.44)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$H_n(t) = c_n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) h_n(t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.45)$$

wobei

$$h_n(t) = \exp(t^2) \frac{d^n}{dt^n} \exp(-t^2). \quad (2.46)$$

Die Funktionen $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, mit $\|H_n\| = 1$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.

Das n -te Hermitesche Polynom

$$H_n(t) = (-1)^n \exp(t^2) \frac{d^n}{dt^n} \exp(-t^2) \quad (2.47)$$

lässt sich mit Hilfe der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.48)$$

einfach bestimmen. In der folgenden Abbildung sind die Graphen von $H_n(t)$, $n = 0, \dots, 4$, dargestellt.

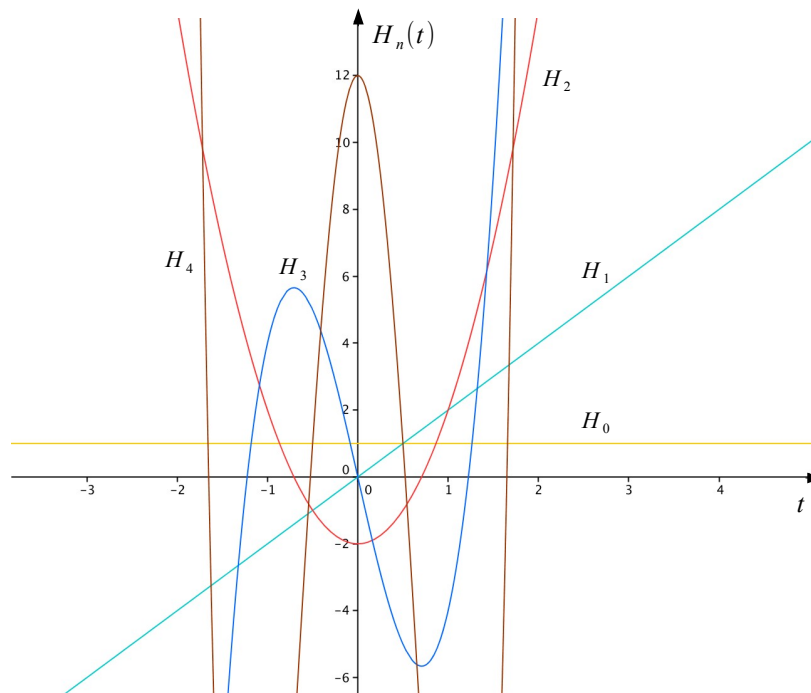


Abbildung 2.1 Hermite-Polynome $H_n(t)$

Satz 2.21 Der Legendresche Differentialoperator*Sei*

$$A : C^\infty(\overline{(-1, 1)}) \rightarrow C^\infty(\overline{(-1, 1)}), \quad x(t) \mapsto Ax(t) := -((1 - t^2)x'(t))'. \quad (2.49)$$

Der Operator A ist in $L^2((-1, 1))$ wesentlich selbstadjungiert. Weiterhin gilt

$$\sigma(\bar{A}) = \sigma_p(\bar{A}) \quad (2.50)$$

und die Eigenwerte von \bar{A} sind

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.51)$$

wobei jeder Eigenwert einfach ist. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$P_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n} (1 - t^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.52)$$

Wählen wir

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1 - t^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.53)$$

*so bilden die Funktionen $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2((-1, 1))$.**Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $P(t)$ ein Polynom in t und*

$$(A_m x)(t) := -((1 - t^2)x'(t))' + \frac{m^2}{1 - t^2} x(t) \quad (2.54)$$

mit

$$D(A_m) = \{x(t) \mid x(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} P(t)\}. \quad (2.55)$$

Der Operator A_m ist in $L^2((-1, 1))$ wesentlich selbstadjungiert. Weiterhin gilt

$$\sigma(\bar{A}_m) = \sigma_p(\bar{A}_m) \quad (2.56)$$

und die Eigenwerte von \bar{A}_m sind

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad n = m, m + 1, \dots, \quad (2.57)$$

wobei jeder Eigenwert einfach ist. Die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen sind

$$P_n^m(t) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(t), \quad n = m, m + 1, \dots, \quad (2.58)$$

wobei $P_n^{(m)}(t)$ die m -te Ableitung des normierten Legendre-Polynoms (2.53) ist.

Setzen wir $c_n^{-1} = (-1)^n 2^n n!$, so erhalten wir, für $n = 0, \dots, 7$, folgende graphische Darstellung der Legendre-Polynome $P_n(t)$:

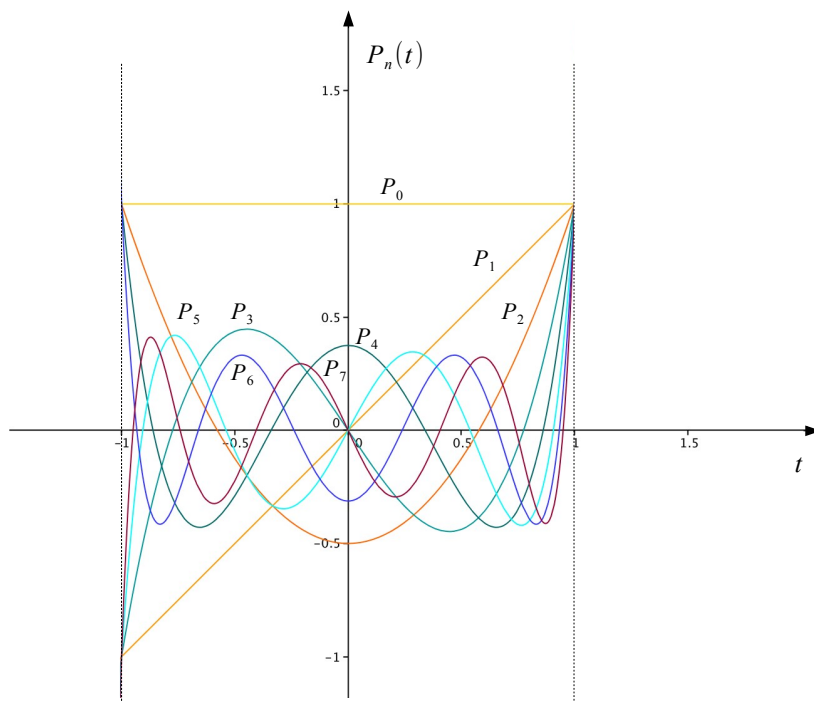


Abbildung 2.2 Legendre-Polynome $P_n(t)$

Verzichten wir auf den Normierungsfaktor in (2.58), so erhalten wir

$$P_n^m(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (1 - t^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, m = 0, 1, \dots, n. \quad (2.59)$$

Diese Funktionen werden als *zugeordnete Legendre-Funktionen* bezeichnet.

Definition 2.22 Eine Funktion $S : \omega_n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Kugelflächenfunktion vom Grad $k \in \mathbb{N}$* , falls ein *homogenes Polynom $P_k(x)$ vom Grad k* existiert, so dass

$$S(\vartheta) = \frac{1}{r^k} P_k(\vartheta), \quad (2.60)$$

mit $r = |x|$, $x = (r, \vartheta)$, gilt.

Satz 2.23 Sei $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dann sind

$$S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!2\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, \dots, l, \quad (2.61)$$

$$\tilde{S}_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!2\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) \sin(m\varphi), \quad m = 1, \dots, l, \quad (2.62)$$

Kugelflächenfunktionen vom Grad l , $l \in \mathbb{N}_0$, auf ω_3 . Ferner ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} S_0^{(l)}, S_1^{(l)}, \dots, S_l^{(l)}, \tilde{S}_1^{(l)}, \dots, \tilde{S}_1^{(l)} \mid l \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (2.63)$$

ein vollständiges orthonormiertes System von Kugelflächenfunktionen und ein vollständiges orthonormiertes System von Eigenfunktionen des Beltrami-Operators B_3 für $n = 3$.

Der Beltrami-Operator ist, für $n = 3$, erklärt durch

$$B_3 := -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad D(B_3) = C^\infty(\omega_3). \quad (2.64)$$

Es gilt

$$B_3(S_m^{(l)}) = l(l+1)S_m^{(l)} \quad \text{und} \quad B_3(\tilde{S}_m^{(l)}) = l(l+1)\tilde{S}_m^{(l)}.$$

Satz 2.24 Der Laguerresche Differentialoperator

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und

$$A_\alpha : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad x(t) \mapsto A_\alpha x(t) := -4(tx'(t))' + \left(t + \frac{\alpha^2}{t}\right)x(t). \quad (2.65)$$

Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$A_\alpha x(t) - \lambda x(t) = 0 \quad (2.66)$$

(i) für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Lösung

$$x_0(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} p_0(t), \quad (2.67)$$

wobei $p_0(t)$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ ist,

(ii) in einer Umgebung des Nullpunktes die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 x_0(t) + c_2 (b_{\alpha,\lambda} x_0(t) \ln t + t^{-\frac{\alpha}{2}} p_1(t)), \quad (2.68)$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $b_{0,\lambda} \neq 0$, $b_{\alpha,\lambda} = 0$ für $\alpha \neq \mathbb{N}_0$ und die Potenzreihe $p_1(t)$ in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert.

Sei nun

$$D(A_\alpha) = \{x(t) \mid x(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} y(t) \text{ mit } y(t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^*}) \cap C_0(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+^*}\}. \quad (2.69)$$

Dann ist der Operator A_α in $L^2(\mathbb{R}_+^*)$ positiv definit und wesentlich selbstadjungiert.

Weiterhin gilt

$$\sigma(\bar{A}_\alpha) = \sigma_p(\bar{A}_\alpha) \quad (2.70)$$

und die Eigenwerte von \bar{A}_α sind

$$\lambda_n = 2(2n + 1 + \alpha), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.71)$$

wobei jeder Eigenwert einfach ist. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$L_{n,\alpha}(t) = c_n \exp\left(\frac{t}{2}\right) t^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (\exp(-t) t^{n+\alpha}), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.72)$$

Die Funktionen $\{L_{\alpha,n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, mit $\|L_{\alpha,n}\| = 1$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

Die Laguerreschen Funktionen $L_{n,\alpha}(t)$ lassen sich schreiben als

$$L_{n,\alpha}(t) = c_n \exp\left(-\frac{t}{2}\right) t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_{\alpha,n}(t), \quad (2.73)$$

wobei die Funktion

$$\mathcal{L}_{\alpha,n}(t) := e^t t^{-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^{n+\alpha}), n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.74)$$

ein Polynom n -ten Grades ist und *verallgemeinertes Laguerresches Polynom* genannt wird. Die *Laguerreschen Polynome* $L_n(t)$ sind durch

$$L_n(t) := e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (2.75)$$

erklärt.

Für $n = 0, \dots, 3$, erhalten wir folgende graphische Darstellung der Laguerre-Polynome $L_n(t)$:

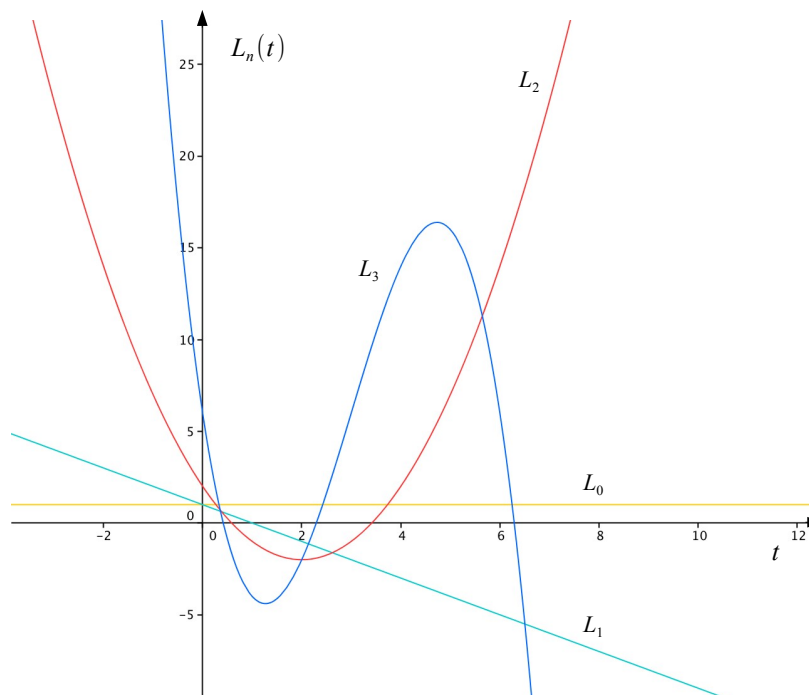


Abbildung 2.3 Laguerre-Polynome $L_n(t)$

Satz 2.25 Der Besselsche Differentialoperator

Sei $\nu \in \mathbb{R}_+$ und

$$A_\nu : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad x(t) \mapsto A_\nu x(t) := -x''(t) - \frac{1}{t}x'(t) + \frac{\nu^2}{t^2}x(t). \quad (2.76)$$

Dann besitzt die Besselsche Differentialgleichung

$$A_\nu x(t) - x(t) = 0 \quad (2.77)$$

(i) die Besselsche Funktion erster Art $J_\nu(t)$,

$$J_\nu(t) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2j}}{j! \Gamma(\nu+j+1)}, \quad (2.78)$$

in \mathbb{R}_+^* als Lösung. Die Reihen und die k -ten Ableitungen der Reihen konvergieren in $[t_1, t_2]$, $0 < t_1 < t_2 < \infty$, absolut und gleichmäßig.

(ii) die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_\nu(t) \int_t^\epsilon \tau^{-1} J_\nu^{-2}(\tau) d\tau \quad (2.79)$$

in $(0, \epsilon)$ mit einem $\epsilon > 0$, das hinreichend klein gewählt wird, und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Definition 2.26 Für $\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$ schreiben wir

$$J_{-\nu}(t) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2j-\nu}}{j! \Gamma(j+1-\nu)}. \quad (2.80)$$

Damit ist die Neumannsche Funktion (oder Besselsche Funktion zweiter Art) $N_\nu(t)$ für nicht-ganzzahlige ν durch

$$N_\nu(t) := \frac{J_\nu(t) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(t)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2.81)$$

expliziert. Hiermit wird die Neumannsche Funktion N_n , $n \in \mathbb{N}_0$, mittels

$$N_n(t) := \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(t), \quad \nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0, \quad (2.82)$$

definiert. Weiterhin werden die Hankelsche Funktionen erster und zweiter Art (oder Besselsche Funktionen dritter Art) $H_\nu^{(1)}(t)$ sowie $H_\nu^{(2)}(t)$ durch

$$H_\nu^{(1)}(t) := J_\nu(t) + iN_\nu(t) \quad (2.83)$$

und

$$H_\nu^{(2)}(t) := J_\nu(t) - iN_\nu(t) \quad (2.84)$$

expliziert.

Ist $\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$, dann sind $J_\nu(t)$ und $J_{-\nu}(t)$ linear unabhängig.

Die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 0 lautet

$$J_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j} \quad (2.85)$$

und die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 1

$$J_1(t) = \frac{t}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(j+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j}, \quad (2.86)$$

wobei $t > 0$ sei. Mit dem Rekursionssatz

$$tJ_{\nu+1} - 2\nu J_{\nu} + tJ_{\nu-1} = 0, \quad t > 0, \nu \in \mathbb{R}_+^*$$

lassen sich nun leicht die Funktionen n -ter Ordnung mit $n = 2, 3, \dots$ bestimmen.

Für $n = 0, \dots, 3$, erhalten wir folgende graphische Darstellung der Bessel-Polynome $J_n(t)$:

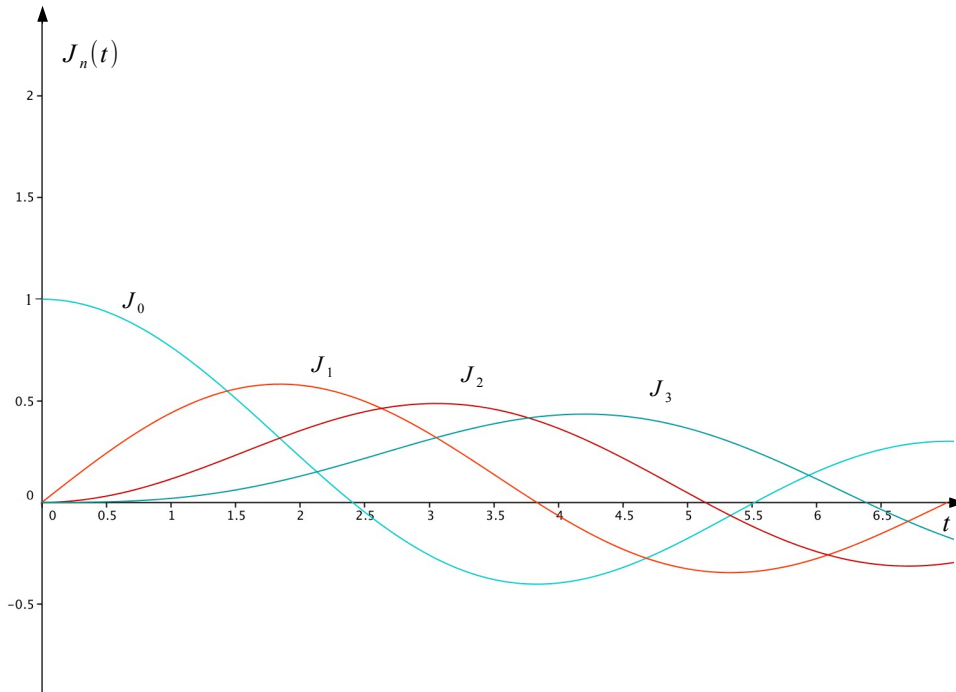


Abbildung 2.4 Bessel-Polynome $J_n(t)$

Sind $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ zwei Nullstellen von J_k , $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$\int_0^1 x J_k(\eta_1 x) J_k(\eta_2 x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \eta_1 \neq \eta_2 \\ \frac{1}{2} J_{k+1}^2(\eta_1) = J_k'(\eta_1) & \text{für } \eta_1 = \eta_2. \end{cases} \quad (2.87)$$

Bessel-Funktionen lassen sich auch mit Hilfe parameterabhängiger Integrale definieren. Hierzu setzen wir

$$f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot e^{-ix \cos t} dt, \quad (2.88)$$

wobei $p \in \mathbb{R}_+$.

Die Reihe

$$e^{-ix \cos t} = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{x^m}{m!} \cos^m t$$

konvergiert gleichmäßig hinsichtlich t . Demnach gilt

$$f_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{x^m}{m!} \int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot \cos^m t dt. \quad (2.89)$$

Da f_p für ungerade m verschwindet, setzen wir $m = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot \cos^{2k} t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t \cdot \cos^{2k} t dt = B\left(p + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right), \quad (2.90)$$

wie sich nach Definition der Eulerschen Betafunktion

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q \in \mathbb{R}_+^*, \quad (2.91)$$

mittels der Substitution $t := \sin^2 \varphi$ zeigen lässt. Mit Hilfe der Gamma-Funktion

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.92)$$

erhalten wir außerdem

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (2.93)$$

da

$$\int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int_0^\infty r^{2(p+q)} e^{-r^2} r^{-1} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{p+q} e^{-t} t^{-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma(p+q)$$

und

$$\begin{aligned}
 B(p, q)\Gamma(p + q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cdot \cos^{2q-1}\varphi \cdot r^{2p+2q-1} e^{-r^2} d\varphi dr \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \Gamma(p)\Gamma(q) .
 \end{aligned}$$

Die Bessel-Funktionen J_p werden nun durch

$$J_p : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto J_p(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} f_p(x) \quad (2.94)$$

erklärt. Diese lassen sich daher auch als Reihen mit

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k x^{2k}, \quad (2.95)$$

schreiben, wobei

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2k)!} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(p + k + 1)} .$$

Zumal

$$k! 2^{2k} \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = k! 2^k (2k-1)(2k-3) \cdot \dots \cdot 1 = (2k)!$$

und

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

folgt

$$c_k = \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(p + k + 1)} .$$

2.5 Fredholm-Operatoren

Definition 2.27 Es seien X, Y Banachräume und $A \in L(X, Y)$. Dann bezeichnen wir A als Fredholm-Operator, wenn

- (i) $N(A)$ endlichdimensional
- (ii) $R(A)$ abgeschlossen und
- (iii) $\operatorname{codim} R(A) := Y/R(A)$ endlichdimensional

ist. Die Zahl $\operatorname{ind} A \in \mathbb{N}_0$, mit

$$\operatorname{ind} A = \dim N(A) - \operatorname{codim} R(A), \quad (2.96)$$

heißt Index von A .

Satz 2.28 Ist $B \in K(X)$, dann ist

$$I - B$$

ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Mit Hilfe der Definition eines Dualsystems lässt sich die Fredholmsche Alternative genauer als bisher formulieren.

Dualsystem

Seien X, Y normierte Räume und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$$

eine beschränkte Bilinearform. Dann heißt $\langle X, Y \rangle$ *Dualsystem*, wenn

(i) aus

$$\langle x_0, y \rangle = 0 \text{ für ein } x_0 \in X \text{ und alle } y \in Y$$

folgt, dass $x_0 = 0$

(ii) und aus

$$\langle x, y_0 \rangle = 0 \text{ für ein } y_0 \in Y \text{ und alle } x \in X$$

folgt, dass $y_0 = 0$ ist.

Es sei $\langle X, Y \rangle$ ein Dualsystem. Dann heißen zwei lineare Operatoren $A : X \rightarrow X$ und $A^t : Y \rightarrow Y$ (zueinander) transponiert, wenn

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle \text{ für } x \in X, y \in Y.$$

Mit $\mathcal{A}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearer Operatoren $A : X \rightarrow X$, die einen transponierten Operator $A^t : Y \rightarrow Y$ besitzen.

Satz 2.29 Fredholmsche Alternative

Sei $A \in \mathcal{A}(X, Y)$. Ferner seien A und A^t Fredholm-Operatoren mit Index Null. Dann gilt:

- (i) Entweder gibt es nur die trivialen Lösungen $x = 0$ bzw. $y = 0$ der homogenen Gleichungen $Ax = 0$ und $A^t y = 0$ oder
- (ii) diese beiden Gleichungen besitzen nicht-triviale Nullräume $N(A)$ bzw. $N(A^t)$ endlicher und gleicher Dimension.

Im ersten Fall sind die inhomogenen Gleichungen

$$Au = w \text{ und } A^t v = z$$

für beliebige $w \in X$ bzw. $z \in Y$ eindeutig lösbar. Im zweiten Fall sind sie genau lösbar, wenn

$$\langle w, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in N(A^t)$$

bzw., wenn

$$\langle x, z \rangle = 0 \text{ für alle } x \in N(A).$$

2.6 Distributionslösungen linearer partieller Differentialgleichungen

2.6.1 Fundamentallösungen partieller Differentialgleichungen

Sei $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann nennen wir eine Distribution $G \in D'(\mathbb{R}^n)$, die der Gleichung

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha G = \delta \quad (2.97)$$

genügt, eine *Fundamentallösung* (*Grundlösung*) des Differentialoperators

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha. \quad (2.98)$$

Existiert für den Differentialoperator

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

mit konstanten Koeffizienten a_α , eine Fundamentallösung $G \in D'(\mathbb{R}^n)$ und ist $S \in D'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution, so dass $S * G$ existiert, so gilt

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (S * G) = S. \quad (2.99)$$

Differentialgleichungen zweiter Ordnung, und hierbei wiederum elliptische, hyperbolische und parabolische, sind beispielsweise für die Physik besonders interessant.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und seien $a_\alpha(x)$ reellwertige Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

- *Elliptische Differentialoperatoren*

Der Differentialoperator

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha$$

heißt *elliptisch*, falls

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{für alle } 0 \neq \xi \in (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel: Der Operator Δ ist elliptisch.

- *Hyperbolische Differentialoperatoren*

Der Differentialoperator

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2 \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)}} a_\alpha D^\alpha$$

heißt *hyperbolisch*, falls

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq 2 \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)}} a_\alpha D^\alpha$$

elliptisch ist.

Beispiel: Der Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

ist hyperbolisch.

- *Parabolische Differentialoperatoren*

Der Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2 \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)}} a_\alpha D^\alpha$$

heißt *parabolisch*, falls

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq 2 \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)}} a_\alpha D^\alpha$$

elliptisch ist.

Beispiel: Der Operator

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

ist parabolisch.

2.6.2 Die Mittelwerteigenschaft und das Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen

Satz 2.30 Mittelwerteigenschaft

Sei $f \in C^2(\Omega)$ harmonisch, d. h.

$$\Delta f = 0 \text{ in } \Omega.$$

Dann gilt, für jede Kugel $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$,

$$f(y) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} f \, d\omega \quad (2.100)$$

und

$$f(y) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_B f \, dx. \quad (2.101)$$

Satz 2.31 Maximum- und Minimumprinzip

Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $\Delta f \geq 0$ bzw. $\Delta f \leq 0$ in Ω . Gibt es einen Punkt $y \in \Omega$ mit

$$f(y) = \sup_{x \in \Omega} f(x)$$

bzw.

$$f(y) = \inf_{x \in \Omega} f(x),$$

dann ist u konstant.

Satz 2.32 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $\Delta f \geq 0$ bzw. $\Delta f \leq 0$ in Ω . Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} f(x)$$

bzw.

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} f(x).$$

Ist f in Ω harmonisch, dann gilt

$$\inf_{x \in \partial\Omega} f(x) \leq f(y) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} f(x), \quad y \in \Omega.$$

Satz 2.33 Seien $f, g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit

$$\Delta f = \Delta g \text{ in } \Omega$$

und

$$f = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$f = g \text{ in } \Omega.$$

2.6.3 Die Poisson-Gleichung und das Newton-Potential

Satz 2.34 Sei $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ und

$$G(x-y) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| & \text{für } n = 2 \end{cases} \quad (2.102)$$

Dabei bezeichnet ω_n den Oberflächeninhalt der Einheitskugel im \mathbb{R}^n und es gilt

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (2.103)$$

Der Funktion $G(\cdot, y) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ordnen wir mittels

$$T_G[\phi] := \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) \phi(x) dx \quad \text{wobei } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (2.104)$$

eine Distribution $T_G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ zu. Der Einfachheit halber nennen wir diese ebenfalls G . Für diese gilt

$$\Delta G = \delta, \quad (2.105)$$

d. h. G ist Fundamentallösung des Laplace-Operators Δ .

Außerdem gilt die Greensche Darstellungsformel

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\omega_x + \int_{\Omega} G(x-y) \Delta u dx, \quad (2.106)$$

wobei $y \in \Omega$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet sei, für welches der Gaußsche Integralsatz gilt.

Beweis: Ist $x \neq y$, so gilt

$$\omega_n \partial_i G(x-y) = \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}, \quad (2.107)$$

$$\omega_n \partial_i \partial_j G(x-y) = \frac{|x-y|^2 \delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+2}} \quad (2.108)$$

und daher

$$\Delta G(x-y) = 0. \quad (2.109)$$

Sei $\epsilon > 0$, $B_\epsilon = B_\epsilon(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \epsilon\}$, so dass $B_\epsilon \subset \Omega$. Nach (1.34) gilt

$$\int_{\Omega \setminus B_\epsilon} G \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \left(G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) d\omega_x + \int_{\partial B_\epsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) d\omega_x. \quad (2.110)$$

Mittels

$$\int_{\partial B_\epsilon} G \frac{\partial u}{\partial \nu} d\omega_x = G(\epsilon) \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\omega_x \leq \omega_n \epsilon^{n-1} G(\epsilon) \sup_{B_\epsilon} |Du| \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial B_\epsilon} = (\nabla G, \nu) \Big|_{\partial B_\epsilon} = \left(\omega_n^{-1} \frac{x-y}{|x-y|^n}, -\frac{x-y}{|x-y|} \right) \Big|_{\partial B_\epsilon} = -G'(\epsilon)$$

und

$$\int_{\partial B_\epsilon} u \frac{\partial G}{\partial \nu} d\omega_x = -G'(\epsilon) \int_{\partial B_\epsilon} u d\omega_x = -\frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon} u d\omega_x \rightarrow -u(y) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

folgt somit die Greensche Darstellungsformel (2.106).

Ist $u \in C_0^2(\Omega)$, so gilt demnach

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x-y) \Delta u(x) \, dx. \quad (2.111)$$

Mit Hilfe des Integraloperators G , lässt sich

$$\Delta G u = G \Delta u = u$$

schreiben.

□

Ist $u \in C^2(\bar{\Omega})$ harmonisch, so gilt

$$u(y) = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\omega_x, \quad (2.112)$$

wobei $y \in \Omega$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in L^1(\Omega)$. Als *Newton-Potential* mit Dichte f bezeichnen wir

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x-y) f(y) \, dy. \quad (2.113)$$

Lemma 2.35 Sei $f \in L^1(\Omega)$ beschränkt. Dann gilt für das Newton-Potential w von f :

$$(i) \quad w \in C^1(\mathbb{R}^n),$$

$$(ii) \quad \partial_i w(x) = \int_{\Omega} \partial_i G(x-y) f(y) dy, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega.$$

Lemma 2.36 Sei $f \in L^1(\Omega)$ beschränkt und sei $f|_K \in C^\alpha(\bar{K})$, mit $0 < \alpha < 1$, für alle $K \subset\subset \Omega$ ³. Dann gilt für das Newton-Potential w von f :

$$(i) \quad w \in C^2(\Omega),$$

$$(ii) \quad \Delta w = f \text{ in } \Omega,$$

$$(iii) \quad \partial_i \partial_j w(x) = \int_{\Omega_0} \partial_i \partial_j G(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\Omega_0} \partial_i G(x-y) \nu_j(y) d\omega_y.$$

$$i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega.$$

Dabei bezeichnet $\Omega_0 \supset \Omega$ ein Gebiet ist, für welches der Gaußsche Integralsatz gilt und ν die äußere Einheitsnormale auf $\partial\Omega_0$. Die Funktion f ist durch Null auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ fortgesetzt.

Satz 2.37 Sei $n \geq 2$.

(i) Ist $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$\Delta T = U.$$

Dann lässt sich T als

$$T = U * G + P, \tag{2.114}$$

mit G gemäß (2.102) und einem harmonischen Polynom P darstellen.

(ii) Ist $U = u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so ist T eine reguläre Distribution mit

$$T(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) u(y) dy + P(x). \tag{2.115}$$

³d.h. \bar{K} ist kompakt und $\bar{K} \subset \Omega$

2.6.4 Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Satz 2.38 Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$G(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.116)$$

Dann gilt $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = \delta, \quad (2.117)$$

d. h. G ist eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Satz 2.39 Wärmeleitungsgleichung

(i) Sei $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und G gemäß (2.116), dann ist

$$T = U * G$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = U. \quad (2.118)$$

(ii) Ist $U = u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Funktion mit kompaktem Träger, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$T(x, t) = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4(t - \tau)}\right) u(y, \tau) dy d\tau \quad (2.119)$$

eine Lösung der Gleichung (2.118).

2.6.5 Fundamentallösung der Wellengleichung

Satz 2.40 Sei $x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ und

$$G(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|x|=t} \varphi(x, t) d\omega_x dt. \quad (2.120)$$

Dann gilt $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta, \quad (2.121)$$

d. h. G ist eine Fundamentallösung der dreidimensionalen Wellengleichung.

Satz 2.41 Wellengleichung

(i) $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ mit $\text{supp } U \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geq 0\}$ und G gemäß (2.120), dann existiert

$$T = G * U,$$

der Träger der Distribution T liegt in $\{(x, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geq 0\}$ und T ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \Delta T = U. \quad (2.122)$$

(ii) Ist $U = u$ eine reguläre Distribution, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$T(x, t) = (G * U)(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{u(y, t - |x-y|)}{|x-y|} dy & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (2.123)$$

eine reguläre Distribution und eine Lösung der Gleichung (2.122).

2.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ und $r = \|x\|$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0, \quad \text{falls } n \geq 3,$$

und

$$\Delta \ln r = 0, \quad \text{falls } n = 2.$$

Aufgabe 2

a) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$, $r = \|x\|$ und

$$F : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$F(x, t) := \frac{\cos(r - ct)}{r}.$$

Zeigen Sie, dass $F(x, t)$ eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F(x, t) = 0$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$F(x, t) := t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) = 0$$

ist.

Aufgabe 3

Sei p eine nichtnegative reelle Zahl und $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t \cdot e^{-ix \cos t} dt.$$

Zeigen Sie, dass f_p eine Lösung der Differentialgleichung

$$f_p''(x) + \frac{2p+1}{x} f_p'(x) + f_p(x) = 0, \text{ wobei } x \neq 0,$$

ist.

Aufgabe 4

Sei $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Das *Newton-Potential* mit Dichte ρ ist gegeben durch

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \rho(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\Delta u = \rho.$$

Aufgabe 5

Sei auf $D = \{f \in C^2([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ ein Differentialoperator L folgendermaßen erklärt

$$L : D \longrightarrow C^0([0,1]) \quad Lf := f'' \text{ für } f \in D.$$

Zeigen Sie: L ist bijektiv (d. h. die Gleichung $Lf = g$ ist für jedes $g \in C^0([0,1])$ eindeutig lösbar), und mit der Greenschen Funktion

$$G(x,y) = \begin{cases} (x-1)y & : 0 \leq y \leq x \\ x(y-1) & : x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

gilt

$$(L^{-1}g)(x) = \int_0^1 G(x,y)g(y) dy.$$

Aufgabe 6

Geben Sie $J_{\frac{5}{2}}$ mittels transzendenter Funktionen an.

Aufgabe 7

Seien a, b, c, p nicht-negative reelle Zahlen. Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1+2a}{x}y' + (b^2c^2x^{2(c-1)} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2})y = 0, \text{ für } x > 0,$$

an.

Aufgabe 8

Durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

lassen sich die Legendre-Polynome erklären. Beweisen Sie folgende Rekursionsformeln:

- a) $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$
- b) $(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)$
- c) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, n \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 9

Wir betrachten die Membranschwingungen gemäß der Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

einer kreisförmigen Membran mit Radius $R = 1$.

- a) Zeigen Sie, dass die einzigen physikalisch sinnvollen Lösungen von

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + (\lambda r^2 - \nu^2)f = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

durch

$$f(r) := c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}r),$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$, gegeben sind.

- b) Sei ξ_k die k -te positive Nullstelle von J_ν . Zeigen Sie, dass dann die Funktionen

$$z_k(r, \varphi, t) := J_\nu(\xi_k r) (A_k \cos(\nu \varphi) + B_k \sin(\nu \varphi)) (C_k \cos(c \xi_k t) + D_k \sin(c \xi_k t)),$$

mit $A_k, \dots, D_k \in \mathbb{R}$, Schwingungen der am Rande eingespannten Membran beschreiben.

- c) Die eingespannte Membran werde von φ unabhängig, d. h. kreissymmetrisch, um $z = h(r)$ ausgelenkt und zur Zeit $t_0 = 0$ losgelassen. Zeigen Sie, dass dann

$$z_k(r, t) = a_k J_0(\xi_k r) \cos(c \xi_k t)$$

gilt.

- d) Zeigen Sie, dass für die Frequenz ν_k der Membran

$$\nu_k = c \frac{\xi_k}{2\pi}$$

gilt. Vergleichen Sie das Frequenzverhältnis

$$\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}$$

der Membranschwingung mit der Schwingung einer Saite.

Aufgabe 10

Der Satz von Liouville für harmonische Funktionen

Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte, harmonische Funktion. Zeigen Sie:

- a) Die Funktionen $\partial_i u$, $i = 1, \dots, n$, sind ebenfalls harmonische Funktionen auf \mathbb{R}^n .
 b) Nach Aufgabenteil a) gilt, aufgrund des Mittelwertsatzes für harmonische Funktionen,

$$\partial_i u(x) = \frac{n}{R^n \omega_n} \int_{B_R(x)} \partial_i u(y) dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } R > 0.$$

Folgern Sie, mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\partial_i u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

- c) Schließen Sie aus Aufgabenteil b), dass u konstant ist.

Aufgabe 11

Sei $K_0 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow |z|^{-1}$, sowie für $h > 0$ eine Funktion $K_h : \mathbb{R}^3 \ni z \longrightarrow (|z|^2 + h)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben. Ferner sei $B_r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r\}$ mit $r > 0$, sowie $f \in C^1(\bar{B}_1)$ und für $h \geq 0$

$$\mathbb{R}^3 \ni x \longrightarrow F_h(x) := \int_{B_1} K_h(x-y)f(y) dy.$$

- a) Warum ist F_0 wohldefiniert? Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von K_h , und zeigen Sie, dass für $h \geq 0$, $1 \leq l, m \leq 3$ und $z \in \mathbb{R}^3$

$$|\partial_l K_h(z)| \leq |z|^{-2} \quad \text{und} \quad |\partial_m \partial_l K_h(z)| \leq 4|z|^{-3}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\Delta K_0(z) = 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$\int_{\partial B_1} \sum_{l=1}^3 \partial_l K_0(x-y) y_l d\omega_y = 4\pi \quad \text{mit } x \in B_1.$$

- b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^3 : |\alpha| \leq 2$, $1 \leq l \leq 3$, sowie $x \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_{B_1} \partial_l K_0(x-y)f(y) dy$$

existiert, und für $h > 0$

$$F_h \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{und} \quad D_x^\alpha F_h(x) = \int_{B_1} D_x^\alpha K_h(x-y)f(y) dy$$

gilt.

- c) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt, sowie $\alpha \in \mathbb{N}_0^3 : |\alpha| \leq 1$. Zeigen Sie, dass für $x \in G$ und $h \rightarrow 0$

$$\int_{B_1} D_x^\alpha K_h(x-y)f(y) dy \longrightarrow \int_{B_1} D_x^\alpha K_0(x-y)f(y) dy$$

sowie für $1 \leq l, m \leq 3$, $x \in B_1$ und $h \rightarrow 0$

$$\int_{B_1} \partial_l \partial_m K_h(x-y)f(y) dy \longrightarrow \int_{B_1} \partial_l \partial_m K_0(x-y)f(y) dy$$

gleichmäßig konvergieren.

Sei $r \in (0, 1)$ und $1 \leq l, m \leq 3$. Zeigen Sie, dass für $x \in B_r(0)$ und $h \rightarrow 0$

$$\int_{\partial B_1} \partial_l K_h(x-y) y_m d\omega_y \longrightarrow \int_{\partial B_1} \partial_l K_0(x-y) y_m d\omega_y$$

gleichmäßig konvergiert.

- d) Folgern Sie aus den vorangegangenen Ergebnissen, dass $F_0|_{B_1} \in C^2(B_1)$ sowie, für $x \in B_1$ und $1 \leq l, m \leq 3$,

$$\partial_l \partial_m F_0(x) = \int_{B_1} \partial_l \partial_m K_0(x-y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_l K_0(x-y) y_m d\omega_y$$

$$\Delta F_0(x) = -4\pi f(x).$$

- e) Sei $d : (x, y) \in \bar{B}_1 \times \bar{B}_1 \mapsto d(x, y) := 1 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2$. Für $x \in B_1 \setminus \{0\}, y \in B_1$ gilt

$$x|x|^{-2} - y \neq 0 \quad \text{und} \quad |x|^{-1} K_0(x|x|^{-2} - y) = d(x, y)^{-\frac{1}{2}}$$

sowie für $x \in B_1, y \in B_1$

$$d(x, y) \geq (1 - |x|)^2 \quad \text{und} \quad \Delta_x(d(x, y)^{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

- f) Seien

$$H_1 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x|^{-1} F_0(x|x|^{-2}) \quad \text{und} \quad H_2 : B_1 \ni x \mapsto \int_{B_1} d(x, y)^{-\frac{1}{2}} f(y) dy.$$

Zeigen Sie, dass:

- (i) $H_1 \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ und für $x \in \partial B_1$: $H_1(x) = F_0(x)$
- (ii) H_2 wohldefiniert, $H_2 \in C^2(B_1)$ und $\Delta H_2|_{B_1} = 0$.
- (iii) $H_1|_{B_1 \setminus \{0\}} = H_2|_{B_1 \setminus \{0\}}$.

- g) Sei die Greensche Funktion $G : \{(x, y) \in \bar{B}_1 \times B_1 \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$ zum Laplace-Operator und Kugel B_1 folgendermaßen definiert

$$G(x, y) := -\frac{1}{4\pi} (K_0(x-y) - d(x, y)^{-\frac{1}{2}}).$$

Sei $f \in C^1(\bar{B}_1)$. Zeigen Sie, dass

$$g : \bar{B}_1 \ni x \mapsto \int_{B_1} G(x, y) f(y) dy$$

wohldefiniert ist und

$$g \in C^0(\bar{B}_1), \quad g|_{B_1} \in C^2(B_1), \quad \Delta(g|_{B_1}) = f, \quad g|_{\partial B_1} = 0.$$

Aufgabe 12

Sei H Hilbertraum und A ein hermitescher Operator in H mit Definitionsbereich $D(A)$.

Zeigen Sie:

- (i) Jeder Eigenwert von A ist reell.
- (ii) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen paarweise aufeinander senkrecht.
- (iii) Sei x ein Eigenvektor von A . Dann bildet A die Menge $\{x\}^\perp \cap D(A)$ in $\{x\}^\perp$ ab.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie eine reguläre Lösung $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ von

$$(D^2 - 1)G = -\delta.$$

3 Rand- und Anfangswertprobleme

3.1 Elliptische Differentialoperatoren und elliptische Randwertprobleme

3.1.1 Das Dirichlet- und das Neumann-Problem für den Laplace-Operator

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten und $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

Definition 3.1 *Das innere Dirichlet-Problem*

Sei $g \in C^0(\partial\Omega)$. Gesucht ist eine Funktion $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit

$$\Delta f = 0 \text{ in } \Omega$$

und

$$f|_{\partial\Omega} = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Definition 3.2 *Das äußere Dirichlet-Problem*

Sei $g \in C^0(\partial\Omega)$. Gesucht ist eine Funktion $f \in C^2(\hat{\Omega}) \cap C^0(\bar{\hat{\Omega}})$ mit

$$\Delta f = 0 \text{ in } \Omega$$

und

$$f|_{\partial\Omega} = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

$$|u(x)| \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty.$$

Definition 3.3 Das innere Neumann-Problem

Sei $g \in C^0(\partial\Omega)$. Ist $y \in \partial\Omega$, so bezeichnen wir mit ν_y die äußere Normale im Punkt y . Gesucht ist eine Funktion $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, so dass

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} \frac{\partial f(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial f(y)}{\partial \nu_y},$$

existiert. Dabei strebt x längs der Normalenrichtung ν_y gegen y . Ferner gelte

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

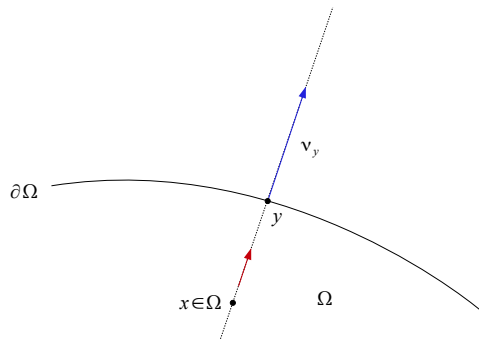


Abbildung 3.1 Normale ν_y

Definition 3.4 Das äußere Neumann-Problem

Sei $g \in C^0(\partial\Omega)$. Ist $y \in \partial\Omega$, so bezeichnen wir mit ν_y die äußere Normale im Punkt y . Gesucht ist eine Funktion $f \in C^2(\hat{\Omega}) \cap C^0(\bar{\hat{\Omega}})$, so dass

$$\lim_{\hat{\Omega} \ni x \rightarrow y} \frac{\partial f(x)}{\partial \nu_y} = \frac{\partial f(y)}{\partial \nu_y},$$

existiert. Dabei strebt x längs der Normalenrichtung $-\nu_y$ gegen y . Ferner gelte

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$|f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Satz 3.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand, und $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ sei ebenfalls zusammenhängend.

(i) Dann besitzen das innere Dirichletsche, das äußere Dirichletsche und das äußere Neumannsche Problem höchstens eine Lösung.

(ii) Eine notwendige Voraussetzung für die Lösbarkeit des inneren Neumannschen Problem ist

$$\int_{\partial\Omega} g(y) d\omega = 0. \quad (3.1)$$

(iii) Ist $f(x)$ eine Lösung des inneren Neumannschen Problems, so ist $f(x) + c$, mit $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung dieses Problems.

Definition 3.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand und $n \geq 3$. Ferner sei $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu|_{\partial\Omega} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und G gegeben durch (2.102). Dann wird

(i) als Potential der einfachen Schicht die Funktion u mit

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} G(x - y) \mu(y) d\omega_y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

(ii) und als Potential der doppelten Schicht die Funktion v mit

$$v(x) := \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y) \right) \mu(y) d\omega_y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

bezeichnet.

L^p - und C^α -Abschätzungen

Als Folgerung der Hardy-Littlewood-Ungleichung erhalten wir ein, im Rahmen der L^p -Abschätzungen, nützliches Ergebnis:

Satz 3.7 Sei $1 < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < n$ und

$$\frac{1}{q_1} := \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{n} - 1 > 0.$$

Ferner sei $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt, mit

$$(r^{-\lambda} * f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y - x|^\lambda} f(x) dx$$

und $c = c(\lambda, n, q)$,

$$\|r^{-\lambda} * f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.4)$$

Ein entsprechendes Ergebnis für schwach singuläre Integraloperatoren lässt sich auch in Hinblick auf Hölder-Abschätzungen formulieren.

Satz 3.8 Hölder-Korn-Lichtenstein-Ungleichung

Sei $B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\}$ und $0 < \alpha < 1$. Ferner sei $u : \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Mittelwert 0.

Zudem sei $f \in C^\alpha(\overline{B_R(0)})$ mit $f = 0$ auf $\partial B_R(0)$. Dann existiert

$$Tf(x) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{B_R(0) \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy \quad (3.5)$$

punktweise und es gilt

$$\|Tf\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\overline{B_R(0)})}, \quad (3.6)$$

wobei $c = c(n, R, \alpha)$ ist ⁴.

Satz 3.9 Calderón-Zygmund-Ungleichung

Sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ und $1 < p < \infty$. Ferner sei $u : \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, beschränkt und besitze den Mittelwert 0.

Zudem sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert

$$Tf(x) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{B_R(0) \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy \quad (3.7)$$

in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.8)$$

wobei $c = c(n, p)$ ist.

⁴Dabei bedeutet $C^\alpha(\overline{\mathbb{R}^n})$, dass Supremum und Hölder-Konstante über \mathbb{R}^n gebildet werden.

Sprungrelationen

Lemma 3.10 Sprungrelationen für das Doppelschichtpotential

Sei $y \in \partial\Omega$ und $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Dann gilt für das, in (3.3) definierte Potential v der doppelten Schicht

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} v(x) = \frac{1}{2} \mu(y) + v(y) = \mu(y) + \lim_{\hat{\Omega} \ni x \rightarrow y} v(x). \quad (3.9)$$

Beweis: Vorerst beschränken wir uns, für die Belegung des Doppelschichtpotentials, auf den Fall $\mu(y) = 1$ für $y \in \partial\Omega$. Ist $x \in \Omega$, so existiert ein $\epsilon_0 > 0$, so dass

$$B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \epsilon\} \subset \Omega$$

für $\epsilon \leq \epsilon_0$. Mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel (1.34) zeigt sich, dass

$$\begin{aligned} v(x) &= - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{\partial G(x-y)}{\partial \nu_y} d\omega_y = - \frac{1}{\omega_n} \int_{|y-x|=\epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{y_j - x_j}{|x-y|^n} \cdot \frac{x_j - y_j}{|x-y|} d\omega_y \\ &= \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{|y-x|=\epsilon} d\omega_y = 1. \end{aligned}$$

Für $x \in \partial\Omega$ betrachten wir

$$\partial\Omega_\epsilon := \partial\Omega \setminus (\partial\Omega \cap B_\epsilon), \quad B_\epsilon := B_\epsilon(x),$$

$$S_\epsilon := \partial B_\epsilon \cap \Omega.$$

Nach der zweiten Greenschen Formel folgt

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y) d\omega_y \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\Omega \setminus (\Omega \cap B_\epsilon)} \Delta G(x-y) dy - \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y) d\omega_y \end{aligned}$$

und demnach

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon} d\omega_y = \frac{1}{2}.$$

Für $x \in \hat{\Omega}$ folgt, ebenfalls nach der zweiten Greenschen Formel,

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x-y) d\omega_y = \int_{\Omega} \Delta G(x-y) dy = 0.$$

Für $\mu \in C^0(\partial\Omega)$ betrachten wir

$$v(x) = u(x) + w(x),$$

$x_0 \in \partial\Omega$ und

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(x_0) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y) d\omega_y,$$

$$w(x) := \int_{\partial\Omega} (\mu(y) - \mu(x_0)) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y) d\omega_y.$$

Ferner lässt sich zeigen, dass w im Punkt x_0 stetig ist.

□

Lemma 3.11 Sprungrelationen für das Einfeldschichtpotential

(i) Für das in (3.2) definierte Potential u der einfachen Schicht existieren für jeden Punkt $y \in \partial\Omega$ die Grenzwerte

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_i := \lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y} \quad (3.10)$$

und

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_a := \lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y}, \quad (3.11)$$

wobei x entlang $\pm \nu_y$ gegen y konvergiert.

(ii) Sei

$$K(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y)$$

der Kern des Doppelschichtpotentials und

$$w(x) := \int_{\partial\Omega} K(y, x) \mu(y) d\omega_y.$$

Dann gilt

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_i = w(y) - \frac{\mu(y)}{2} = \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_a - \mu(y). \quad (3.12)$$

Satz 3.12 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ein zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit einem C^2 -Rand. Das Gebiet $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ sei ebenfalls zusammenhängend. Ferner sei

$$K(x, y) := \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x - y)$$

und

$$(A\mu)(x) := \int_{\partial\Omega} K(x, y) \mu(y) d\omega_y.$$

- (i) Dann besitzen das innere und das äußere Dirichlet-Problem genau eine Lösung. Die Lösung des inneren Dirichlet-Problems lässt sich als Doppelschichtpotential v darstellen, wobei

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} v(x) = ((\frac{1}{2}I + A)\mu)(y) = g(y). \quad (3.13)$$

- (ii) Dann besitzt das äußere Neumann-Problem genau eine Lösung. Diese kann als Einfachschichtpotential u dargestellt werden, wobei

$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right)_a = ((\frac{1}{2}I + A^*)\mu)(y) = g(y). \quad (3.14)$$

- (iii) Dann besitzt das innere Neumann-Problem eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung, falls die Bedingung (3.1) erfüllt ist.

3.1.2 Elliptische Randwertprobleme

Wir nennen ein Randwertproblem *regulär elliptisch* entsprechend der im Folgenden angegebenen Definition aus [51].

Definition 3.13 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞ -Rand, $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $b_j \in C^\infty(\partial\Omega)$, $j = 1, \dots, m$. Ferner sei

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha u(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.15)$$

und

$$(B_j u)(y) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(y) D^\alpha u(y), \quad y \in \partial\Omega, j = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Definition 3.14 Der Differentialoperator A , heißt proper elliptisch in Ω , falls

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{für alle } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } x \in \bar{\Omega} \quad (3.17)$$

und das Polynom

$$a(x, \xi + \tau\eta) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto a(x, \xi + \tau\eta)$$

in der Variablen $\tau \in \mathbb{C}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \bar{\Omega}$ genau m Wurzeln $\tau_k^+ = \tau_k^+(x; \xi, \eta)$, $k = 1, \dots, m$, mit positivem Imaginärteil besitzt (Wurzelbedingung).

Definition 3.15 Das System $\{B_j\}_{j=1}^k$ der Differentialoperatoren

$$(B_j u)(y) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(y) D^\alpha u(y)$$

heißt normal auf $\partial\Omega$, falls

$$0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k$$

und

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j,\alpha}(x) \nu_x^\alpha \neq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.18)$$

für jeden Normalvektor $\nu_x \neq 0$ auf Ω , wobei $x \in \partial\Omega$ (Normalitätsbedingung).

Definition 3.16 Sei A proper elliptisch in Ω gemäß Definition 3.14 und $\{B_j\}_{j=1}^m$ das Normalsystem auf $\partial\Omega$ gemäß Definition 3.15 mit $k = m$ und m wie in Definition 3.13, dann wird $\{B_j\}_{j=1}^m$ als komplementiertes System auf $\partial\Omega$ hinsichtlich A bezeichnet, falls die Polynome

$$b_j(x, \xi_x + \tau \nu_x) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j,\alpha}(x) (\xi_x + \tau \nu_x)^\alpha \quad (3.19)$$

in der Variablen $\tau \in \mathbb{C}$ für alle $x \in \bar{\Omega}$, alle Normalenvektoren $\nu_x \neq 0$ und alle Tangentialvektoren $\xi_x \neq 0$ hinsichtlich $x \in \partial\Omega$ linear unabhängig modulo

$$a^+(x; \xi, \eta, \tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^+) \quad (3.20)$$

ist (Komplementierungsbedingung).

Definition 3.17 Das System $\{A; B_1, \dots, B_m\}$ wird regulär elliptisch in Ω genannt, falls

- a) der Operator A proper elliptisch in Ω im Sinne der Definition 3.14,
- b) das System $\{B_j\}_{j=1}^m$ normal in Ω im Sinne der Definition 3.15 mit $k = m$ und $m_m \leq 2m - 1$ und
- c) das System $\{B_j\}_{j=1}^m$ komplementiert auf $\partial\Omega$ hinsichtlich A im Sinne der Definition 3.16 ist.

A-priori-Abschätzungen

Sei $l \geq 2m$ eine ganze Zahl. Dann gehört jede Lösung u des Problems

$$Au = f \quad \text{in } \Omega \quad (3.21)$$

$$B_j u|_{\partial\Omega} = g_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.22)$$

in $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, falls $f \in C^{l-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ und $g_j \in C^{l-m_j+\alpha}(\partial\Omega)$. Weiterhin existiert eine Konstante $C = C(n, l, \alpha, \Omega) > 0$, so dass

$$\|u\|_{C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C (\|f\|_{C^{l-2m+\alpha}(\bar{\Omega})} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{C^{l-m_j+\alpha}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)}) \quad (3.23)$$

3.2 Zerlegungssätze

Die Helmholtz-Zerlegung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, beschränkt mit besitze einen C^1 -Rand. Dann ist die Helmholtz-Zerlegung gegeben als die direkte Summe

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{\nabla f \mid f \in W^{1,p}(\Omega)\} \oplus \overline{\{g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} g = 0\}}^{\|\cdot\|_p}. \quad (3.24)$$

Wie in [52] gezeigt, kann $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ausgedrückt werden als

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) = \mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(P). \quad (3.25)$$

Ist $f \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$, so können wir diese Operatoren Q und P explizit darstellen mittels

$$(Qf)(x) := -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \operatorname{div}_y f(y) dy + \operatorname{grad} H(x) \quad (3.26)$$

und

$$(Pf)(x) := \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \operatorname{rot}_y f(y) dy - \operatorname{grad} H(x), \quad (3.27)$$

wobei H eine Lösung eines bestimmten Neumann-Problems ist.

Der Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Nach dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis lassen sich Vektorfelder $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ folgendermaßen darstellen:

$$g = -\operatorname{grad} U + \operatorname{rot} A, \quad (3.28)$$

wobei U gegeben ist durch das skalare Potential

$$U(x) := \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \operatorname{div}_y g(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{(\nu, g)(y)}{|x-y|} d\omega_y \right) \quad (3.29)$$

und A durch das solenoidale (=divergenzfreie) Vektorpotential

$$A(x) := \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \operatorname{rot}_y g(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{(\nu \times g)(y)}{|x-y|} d\omega_y \right). \quad (3.30)$$

3.3 Hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen

3.3.1 Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

Sei $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0\} \quad (3.31)$$

und

$$\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t \geq 0\}. \quad (3.32)$$

Ferner sei $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

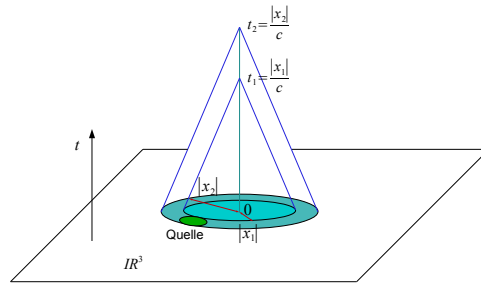


Abbildung 3.2 Gebiet und Signalausbreitung

Satz 3.18 Es sei $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Dann besitzt das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial t^2} - \Delta u(x, y) = f(x, t) \quad (3.33)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad (3.34)$$

genau eine Lösung $u(x, t)$ in $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$.

3.3.2 Das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung

Sei

$$\mathbb{R}_T^{n+1} := \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid 0 < t < T\} \quad (3.35)$$

und

$$\overline{\mathbb{R}_T^{n+1}} := \{(x, t) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} \mid 0 \leq t \leq T\}. \quad (3.36)$$

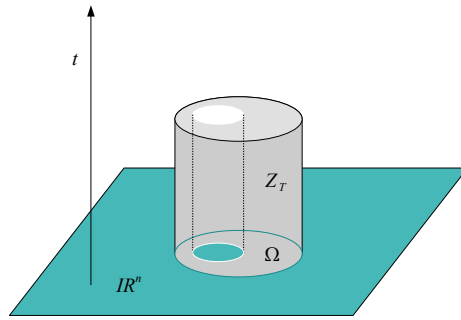


Abbildung 3.3 Gebiet zu Zeiten $t \in [0, T]$

Definition 3.19 Sei $l \in \mathbb{N}_0$. Unter $K^l(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ verstehen wir die Menge der Funktionen

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C},$$

für welche die Ableitungen

$$D_x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \text{ mit } |\alpha| + 2k \leq l \text{ für } (x, t) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$$

existieren, stetig sind und der Bedingung

$$\sum_{|\alpha|+2k \leq l} \sup_{(x,t) \in \overline{\mathbb{R}_T^{n+1}}} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \right| \leq c(T), \text{ mit } c(T) \in \mathbb{R}_+^*,$$

genügen.

Satz 3.20 Sei u_0 eine beschränkte Funktion aus $C^0(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau eine Lösung $u(x, t)$ des Cauchy-Problems

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = 0, \quad \text{mit } u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.37)$$

in $C^2(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap K^0(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Für diese Lösung gilt

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t}) u_0(y) dy & \text{für } t > 0 \\ u_0(x) & \text{für } t \leq 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Satz 3.21 Sei $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wobei u_0 und alle ihre Ableitungen beschränkt seien. Ferner sei

$$f \in \bigcup_{l=0}^{\infty} K^l(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}).$$

Dann besitzt das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \quad \text{mit } u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.39)$$

genau eine Lösung $u(x, t)$ in $C^2(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap K^0(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Für diese Lösung gilt

$$u \in \bigcup_{l=0}^{\infty} K^l(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$$

und, für $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t}) u_0(y) dy \\ & + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}) f(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Beispiel: Das Cauchy-Problem für einen einseitig berandeten linearen Wärmeleiter

Da der Wärmeleiter einseitig berandet ist, betrachten wir $x \in \mathbb{R}_+$. Das Anfangswertproblem ist durch

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.41)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.42)$$

gegeben.

Für

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x - y, t) u_0(y) dy \quad (3.43)$$

mit

$$U(x - y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4kt}\right) \quad (3.44)$$

erhalten wir, mit Hilfe der Substitution

$$y = x + \sqrt{4kt} z,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{4kt} z) e^{-z^2} dz. \quad (3.45)$$

Als Randbedingungen kommen beispielsweise die isotherme Randbedingung

$$u(0, t) = 0$$

oder die adiabatische Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

in Betracht.

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn wir, statt Gleichung (3.43),

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} G(x - y, t) u_0(y) dy, \quad (3.46)$$

mit

$$G(x - y, t) = U(x - y, t) \mp U(x + y, t), \quad (3.47)$$

verwenden.

3.3.3 Rand-Anfangswertprobleme für hyperbolische Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Außerdem sei

$$A := - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}) + c(x) \quad (3.48)$$

mit

$$a_{ik}(x) = a_{ki}(x) \in \mathbb{R}, \quad c(x) \in \mathbb{R}_+, \quad (3.49)$$

$$a_{ik}, c \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad (3.50)$$

und

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \mu |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.51)$$

wobei $\mu > 0$.

Ferner sei

$$Z := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega, \quad 0 < t < \infty\} \quad (3.52)$$

und

$$Z_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega, \quad 0 < t < T\}. \quad (3.53)$$

Mit diesen Vereinbarungen lässt sich ein Rand-Anfangswertproblem beispielsweise folgendermaßen beschreiben:

Gegeben seien $u_0, u_1 \in C^0(\bar{\Omega})$ und $f \in C^0(\bar{Z})$. Dann wird eine Lösung $u \in C^2(\bar{Z})$ von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + Au(x, t) = f(x, t), \quad (3.54)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega \text{ und } 0 < t < \infty \quad (3.55)$$

und

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (3.56)$$

gesucht.

Satz 3.22 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -berandetes Gebiet. Ferner gelte (3.48), (3.49), (3.50), (3.51) und $c \geq 0$. Dann ist der Operator A_D ,

$$(A_D f)(x) = - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}) + c(x)f(x), \quad (3.57)$$

$$D(A_D) = C_0^\infty(\Omega)$$

in $L^2(\Omega)$ positiv-definit. Für den zugehörigen energetischen Raum H_{A_D} gilt

$$H_{A_D} = W_0^{1,2}(\Omega). \quad (3.58)$$

Außerdem gilt für die Friedrichsche Erweiterung⁵ $(A_D)_F$

$$\sigma((A_D)_F) = \sigma_p((A_D)_F). \quad (3.59)$$

Definition 3.23 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -berandetes Gebiet. Ferner sei $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $u_1 \in L^2(\Omega)$. Außerdem sei $f \in L^2(Z_T)$ für alle $T \in \mathbb{R}_+^*$. Wir nennen eine Funktion u verallgemeinerte Lösung des Rand-Anfangswertproblems (3.54), (3.55), (3.56), falls

(i) $u(\cdot, T) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $u \in W^{1,2}(Z_T)$ für alle $T \in \mathbb{R}_+^*$,

(ii) im Distributionssinne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f,$$

(iii) im Sinne des Einbettungssatzes 2.2

$$u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega, \ 0 < t < \infty,$$

(iv) und

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(x, t) - u(x, T)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \searrow 0} \|u(x, t) - u_0(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, T) \right\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - u_1(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

für $T > 0$,

gilt.

⁵siehe Satz 2.18

Satz 3.24 *Das Rand-Anfangswertproblems (3.54), (3.55), (3.56) besitzt, im Sinne der Definition 3.23, genau eine verallgemeinerte Lösung u . Für die Eigenwerte der Friedrichschen Erweiterung des Operators A_D , $(A_D)_F$, gilt*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \text{ und } \lambda_l \rightarrow \infty \text{ für } l \rightarrow \infty. \quad (3.60)$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen $\{g_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ bilden ein hinsichtlich $L^2(\Omega)$ vollständiges Orthornormalsystem. Mit

$$f_l(t) := \int_{\Omega} f(x, t) \overline{g_l(x)} dx$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{l=1}^{\infty} ((u_0, g_l)_{L^2(\Omega)} \cos(\sqrt{\lambda_l} t) + \frac{(u_1, g_l)}{\sqrt{\lambda_l}} \sin(\sqrt{\lambda_l} t) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_l}(t - \tau)) f_l(\tau) d\tau) g_l(x). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Beispiel: Das Cauchy-Problem für eine kreisförmige Membran

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, C^∞ -berandetes Gebiet und

$$Z := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega, 0 < t < \infty\}.$$

Ferner sei $u_0(x), u_1(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $f(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{Z})$.

Wir suchen Funktionen $u(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{Z})$ mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(x, t) = 0, \quad (3.62)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } 0 < t < \infty,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x).$$

Sei vorerst $c = 1$. Wir stützen uns auf folgenden Separationsansatz für den homogenen Fall der Gleichung (3.62):

$$u(x, t) = g(x)h(t). \quad (3.63)$$

Falls g und h hinreichend regulär sind, dann gilt

$$h''g = h\Delta g. \quad (3.64)$$

Für $u \neq 0$ ist das nur möglich, wenn ein $\mu \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\Delta g + \mu g = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.65)$$

und

$$h'' + \mu h = 0 \quad \text{in } (0, \infty). \quad (3.66)$$

Da $u(x, t) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ ist, gilt $g|_{\partial\Omega} = 0$.

Die allgemeine Lösung von Gleichung (3.66) ist

$$h(t) = a_l \cos(\sqrt{\mu_l}t) + b_l \sin(\sqrt{\mu_l}t), \quad (3.67)$$

falls $\mu = \mu_l$.

Sei $\{g_l(x)\}_{l \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ ein vollständiges orthonormiertes System von Eigenfunktionen von Gleichung (3.65).

Dann wird, wie in Satz 3.24 beschrieben, das Cauchy-Problem (3.62), für $f = 0$, einschließlich der Rand- und Anfangsbedingungen durch folgende Funktion (eindeutig) gelöst:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \left((u_0, g_l)_{L^2(\Omega)} \cos(\sqrt{\mu_l}t) + \frac{(u_1, g_l)}{\sqrt{\mu_l}} \sin(\sqrt{\mu_l}t) \right) g_l(x). \quad (3.68)$$

Die schwache Lösung des Dirichlet-Problems

Das Eigenwertproblem (3.65), zusammen mit der Eigenschaft $g|_{\partial\Omega} = 0$, lässt sich folgendermaßen umformulieren zu:

Wir suchen ein $g \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$\int_{\Omega} (\nabla g \cdot \nabla \zeta - \mu g \zeta) = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.69)$$

Für alle $f \in L^2(\Omega)$ existiert, nach dem Rieszschen Darstellungssatz, genau ein $g_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} (\nabla g_f \cdot \nabla \zeta - f \zeta) = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (3.70)$$

und

$$\|g_f\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } f \in L^2(\Omega). \quad (3.71)$$

Demnach wird durch $Tf := g_f$ ein Operator $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega))$ definiert.

T ist selbstadjungiert, positiv semi-definit und injektiv.

Ferner gilt: $T = -\Delta^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega))$ und $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ ist kompakt.

Die Eigenfunktionsbedingung $0 \neq g \in \mathcal{N}(\mu_k^{-1}I - T)$ impliziert also, daß $g \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $T(\mu_k g) = g$ gilt.

Damit ist f schwache Lösung von

$$\Delta g + \mu_k g = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{und } g = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Schwingungen der Membran für $R = 1$ und $c = 1$

Das Eigenwertproblem (3.65) lautet in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \mu g = 0. \quad (3.72)$$

Die Randbedingung lässt sich formulieren als

$$g(1, \varphi) = 0.$$

Nach dem Ansatz $g(r, \varphi) = f(r)w(\varphi)$ erhalten wir

$$\frac{r^2}{f(r)}(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \mu f(r)) = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} = \tilde{c}, \quad (3.73)$$

mit einer Konstanten \tilde{c} .

Da w periodisch ist, mit Periode 2π , muß $\tilde{c} =: k^2$, $k \in \mathbb{N}_0$ sein.

Damit gilt

$$w(\varphi) = \alpha \cdot \cos(k\varphi) + \beta \cdot \sin(k\varphi). \quad (3.74)$$

Aus unserem Eigenwertproblem (3.72) folgt die Gleichung

$$r^2 f'' + r f' + (r^2 \mu - k^2) f = 0. \quad (3.75)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, Eigenwerte μ zu finden, für welche es eine bei $r = 0$ stetige Lösung dieser Differentialgleichung gibt, die außerdem noch der Randbedingung $f(1) = 0$ genügt.

Sei $\mu \neq 0$ und $\kappa^2 := \mu$. Dann führt die Transformation $\rho := r\kappa$ auf

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \left(1 - \frac{\kappa^2}{\rho^2}\right) f = 0. \quad (3.76)$$

Diese Gleichung ist nun aber gut bekannt als Besselsche Differentialgleichung. Die Besselschen Funktionen $J_k(x)$ erster Art und k -ter Ordnung, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ ist, sind Lösungen der Gleichung.

Die Funktionen J_k sind, wie in (2.78) definiert, gegeben durch

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(k+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}. \quad (3.77)$$

Lösungen unsere Differentialgleichung (3.76) lassen sich dann folgendermaßen schreiben:

$$f_k(r) = J_k(\kappa r).$$

Der Eigenwerte $\kappa^2 = \mu$ sind durch die Randbedingung

$$J_k(\kappa) = f_k(1) = 0$$

gegeben. Sie sind also die Quadrate der Nullstellen der Besselschen Funktionen.

Jede der Funktionen J_k besitzt unendlich viele Nullstellen κ_{kl} , wobei $l \in \mathbb{N}$ ist.

Die Eigenfunktionen der Gleichungen (3.65) und (3.72) sind daher gegeben durch

$$g_{kl}(r, \varphi) = J_k(\kappa_{kl}r)(\alpha \cdot \cos(k\varphi) + \beta \cdot \sin(k\varphi)). \quad (3.78)$$

Der Schwingungszustand (k, l) hat k Knotendurchmesser und $l - 1$ innere Knotenkreise. Für die Nullstellen κ_{kl} der Besselfunktionen J_k erhalten wir

$$\kappa_{01} = 2,405, \quad \kappa_{02} = 5,520, \quad \kappa_{03} = 8,654,$$

$$\kappa_{11} = 3,832, \quad \kappa_{12} = 7,016, \quad \kappa_{13} = 10,173.$$

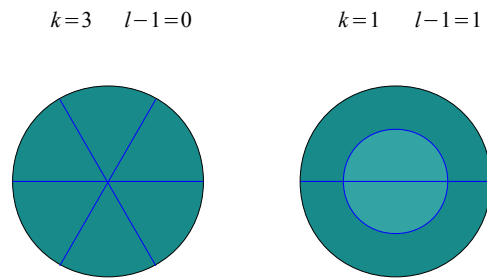


Abbildung 3.4 Knotenlinien von Membranschwingungen

Zur Normierung der Eigenfunktionen bedienen wir uns der Relation

$$2 \int_0^1 J_k^2(\kappa_{kl}r) r \, dr = J_k'^2(\kappa_{kl}). \quad (3.79)$$

Das System

$$\{J_0(\kappa_{0l}r), J_k(\kappa_{kl}r) \cos(k\varphi), J_k(\kappa_{kl}r) \sin(k\varphi); k, l \in \mathbb{N}\}$$

bildet ein vollständiges und orthogonales System in

$$L^2(\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| < 1\}).$$

Die Schwingungen der Membran für allgemeine Werte von R und c

Betrachten wir nun den Fall, daß die Ausgangsgleichung in der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.80)$$

und Ω nicht der Einheitskreis, sondern etwas allgemeiner

$$\Omega = B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| < R\}$$

gegeben ist.

Dann erhalten wir als Eigenwerte

$$\mu_{kl} = \kappa_{kl}^2 \frac{c^2}{R^2} \quad (3.81)$$

und als normierte Eigenfunktionen

$$g_{kl}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi R |J'_k(\kappa_{kl})|}} \cdot J_k(\kappa_{kl} \frac{r}{R}) \cdot \exp(ik\varphi), \quad (3.82)$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$.

Zusammengefaßt lautet die Lösung des Cauchy-Problems nach (3.68)

$$u(r, \varphi, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_{kl} \cos(\kappa_{kl} \frac{c}{R} t) + b_{kl} \sin(\kappa_{kl} \frac{c}{R} t) \right) \cdot \frac{J_k(\kappa_{kl} \frac{r}{R})}{(J'_k(\kappa_{kl}))^2} \cdot \exp(ik\varphi), \quad (3.83)$$

wobei

$$a_{kl} = \int_0^R \int_0^{2\pi} u_0(r, \varphi) J_k(\kappa_{kl} \frac{r}{R}) \exp(-ik\varphi) r dr d\varphi$$

und

$$b_{kl} = \frac{R}{c\kappa_{kl}} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_1(r, \varphi) J_k(\kappa_{kl} \frac{r}{R}) \exp(-ik\varphi) r dr d\varphi.$$

Die Darstellung der Koeffizienten a_{kl} und b_{kl} lässt sich mit Hilfe des Orthogonalitätssatzes (2.87) herleiten. Mit $\sqrt{\mu} = \omega$ impliziert (3.81) folgt

$$\omega = \kappa \frac{c}{R}. \quad (3.84)$$

Somit erhalten wir für die Eigenfrequenzen

$$2\pi\nu_{kl} = \kappa_{kl} \frac{c}{R}. \quad (3.85)$$

3.3.4 Rand-Anfangswertprobleme für parabolische Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Außerdem sei A wie in (3.48), (3.49), (3.50) und (3.51).

Damit beschreiben wir nun ein Rand-Anfangswertproblem durch

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Au(x, t) = f(x, t) \quad (3.86)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } 0 < t < \infty \quad (3.87)$$

und

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.88)$$

Definition 3.25 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -berandetes Gebiet. Ferner sei $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Außerdem sei $f \in L^2(Z_T)$ für alle $T \in \mathbb{R}_+^*$. Wir nennen eine Funktion u verallgemeinerte Lösung des Rand-Anfangswertproblems (3.86), (3.87), (3.88), falls

(i) $u(\cdot, T) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $u \in L^2(Z_T)$ für alle $T \in \mathbb{R}_+^*$,

(ii) im Distributionssinne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f,$$

(iii) im Sinne des Einbettungssatzes 2.2

$$u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < \infty,$$

(iv) und

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(x, t) - u(x, T)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \searrow 0} \|u(x, t) - u_0(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

für $T > 0$,

gilt.

Satz 3.26 Das Rand-Anfangswertproblems (3.86), (3.87), (3.88) besitzt, im Sinne der Definition 3.25, genau eine verallgemeinerte Lösung u . Die Bedeutung von λ_l und g_l ist in Satz 3.24 erklärt. Mit

$$f_l(t) := \int_{\Omega} f(x, t) \overline{g_l(x)} dx,$$

erhalten wir

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} ((u_0, g_l)_{L^2(\Omega)} \exp(-\lambda_l t) + \int_0^t \exp(-\lambda_l(t-\tau)) f_l(\tau) d\tau) g_l(x). \quad (3.89)$$

3.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Sei H ein Hilbertraum und H_1, H_2 seien Teilräume von H mit $H_1 \perp H_2$. Zeigen Sie

$$\overline{H_1 \oplus H_2} = \overline{H_1} \oplus \overline{H_2}$$

und

$$(H_1 \oplus H_2)^\perp = H_1^\perp \cap H_2^\perp.$$

Aufgabe 2

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, beschränkt.

- a) Zeigen Sie, dass mit einer reellen positiven Konstanten a für $u \in H_0^{1,2}(G)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(G)} \leq 2a \|\partial_n u\|_{L^2(G)}$$

gilt.

- b) Für $u, v \in H_0^{1,2}(G)$ sei

$$B(u, v) := \sum_{i=1}^n \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_0 := \sum_{i=1}^n \int_G \overline{(\partial_i u)} (\partial_i v) dx.$$

Zeigen Sie:

- (i) Hierdurch wird eine hermitesche, nichtnegative Sesquilinearform auf dem Hilbertraum $H_0^{1,2}(G)$ definiert.
(ii) Es gibt eine positive Konstante C , so dass für alle $u \in H_0^{1,2}(G)$

$$C \|u\|_{1,2}^2 \leq B(u, u) \leq \|u\|_{1,2}^2.$$

- c) Sei $f \in L^2(G)$ gegeben, sowie $L \in (L^2(G))'$ definiert durch

$$L(g) := \langle f, g \rangle_0 \quad \forall g \in L^2(G).$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung

$$L|_{H_0^{1,2}(G)} : H_0^{1,2}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $H_0^{1,2}(G)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass zu jedem $f \in L^2(G)$ genau ein $u \in H_0^{1,2}(G)$ existiert, mit

$$\sum_{i=1}^n \int_G \overline{\partial_i u} \partial_i \phi \, dx = \int_G \bar{f} \phi \, dx$$

für alle $\phi \in H_0^{1,2}(G)$.

Bemerkung: Ein solches $u \in H_0^{1,2}(G)$ heißt schwache L^2 -Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } G \text{ mit } u|_{\partial G} = 0.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass für $\phi \in C_0^\infty(G)$ die folgende Gleichung gilt

$$\int_G \bar{u}(-\Delta \phi) \, dx = \int_G \bar{f} \phi \, dx.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösung des Cauchy-Problems der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{wobei } x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*,$$

und

$$u(x, 0) = f(x).$$

Aufgabe 4

Welche Ladungsverteilung liegt dem Yukawa-Potential

$$\phi(x) = \frac{Q}{|x|} e^{-\alpha|x|} = Q \left(\frac{1}{|x|} + \frac{e^{-\alpha|x|} - 1}{|x|} \right)$$

zu Grunde?

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Potential $\phi(x)$ und die Feldstärke $E(x)$ eines unendlich langen Zylinderkondensators mit der Flächenladungsdichte $-|\sigma|$ auf dem inneren Zylinder (Radius r_i) und $+|\sigma|$ auf dem äußeren Zylinder (Radius r_a)

- durch Ausnutzung von Symmetrieargumenten und Verwendung des Gaußschen Satzes,
- durch Lösen der Laplace-Gleichung.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$, wobei $\sigma \in C_0^0(\mathbb{R}^2)$.

- Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -4\pi\rho,$$

dass

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(z=0+) - \frac{\partial\phi}{\partial z}(z=0-) = -4\pi\sigma.$$

- Sei

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y).$$

Bestimmen Sie, mit Hilfe der Laplace-Gleichung und der Sprungrelation des Aufgabenteils a), ein durch die Ladungsverteilung erzeugtes Potential.

Aufgabe 7

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten und einem Rand der Klasse C^1 . Ferner sei $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung der Laplace-Gleichung (d. h. eine harmonische Funktion).

- Beweisen Sie, dass

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\omega = 0.$$

- Beweisen Sie die Mittelwertformel

$$\phi(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \phi(x) d\omega$$

welche beispielsweise ausdrückt, dass in einem ladungsfreien Raumbereich der Wert des elektrostatischen Potentials an einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ gleich dem Potentialmittelwert über die Oberfläche S einer Kugel $B_r(x_0) \subset \subset \Omega$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius r ist.

Aufgabe 8

Gesucht ist eine Lösung ϕ und die Greensche Funktion G der Poisson-Gleichung für den Bereich $H := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0\}$.

- a) Berechnen Sie zunächst $G(x, x')$, $x, x' \in \mathbb{R}^3$, für das Feld einer Elementarladung am Ort x' mit einem geerdeten Rand $z = 0$.
- b) Welche anschauliche Bedeutung hat $F(x, x')$ in

$$G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|} + F(x, x') ?$$

- c) Sei ϕ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die nur von r aus den Zylinderkoordinaten (r, φ, x_3) abhängt. Weiterhin gelte

$$\phi|_{\partial H \cap \partial B_{r_i}} = V_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2.$$

Dabei sei $B_{r_i} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r_i^2\}$ mit $r_i > 0$.
Geben Sie ϕ an.

Aufgabe 9*Potential einer Dipolschicht*

Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ sei mit einer Dipolschicht belegt. Sei $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ die Dipolmomentdichte und

$$|p| = \int_S D(x) d\omega$$

das gesamte Dipolmoment der Fläche. Das Vektorfeld $\nu(x)$, mit $|\nu| = 1$, weise in Richtung des lokalen Dipolmomentes. Zeigen Sie, dass sich das Potential ϕ der Dipolschicht als

$$\phi(x) = \int_S D(x') (\nu(x'), \nabla_{x'} \frac{1}{|x - x'|}) d\omega_{x'}$$

schreiben lässt.

Aufgabe 10*Wellengleichung*

a) Formen Sie die skalare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

mit $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, mittels der Koordinatentransformation

$$(z, t) \mapsto (\xi, \eta) \quad \text{mit } \xi := z + ct, \quad \eta := z - ct$$

um und zeigen Sie, dass ein u mit

$$u(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

die Wellengleichung löst. Dabei seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ beliebig.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der skalaren Wellengleichung

$$\Delta u - c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

mit $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$, in Kugelkoordinaten, wenn bekannt ist, dass u lediglich von $|x|$ und t abhängt.

c) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

mit $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, invariant unter der Lorentz-Transformation

$$(z, t) \mapsto (z', t') \quad \text{mit } z' := \gamma(z - vt), \quad t' := \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right)$$

ist. Dabei sei

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

und v die Relativgeschwindigkeit des Systems S' gegenüber S bei einer gleichförmig translatorischen Bewegung.

4 Lineare partielle Differentialgleichungen in der Elektrodynamik und Quantenmechanik

4.1 Die Maxwell-Gleichungen

4.1.1 Physikalische Grundlagen

Die Maxwellschen Feldgleichungen bestehen aus den Gesetzen von

- Coulomb

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (4.1)$$

- Ampère-Maxwell

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + j, \quad (4.2)$$

- Faraday

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.3)$$

- und dem Gesetz von der Divergenzfreiheit des B -Feldes

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (4.4)$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit einer endlichen Anzahl von Zusammenhangskomponenten und einem Rand $\partial\Omega$ der Klasse C^1 . Ferner sei $S \subset \partial\Omega$ eine zweidimensionale kompakte, C^1 -berandete Untermannigfaltigkeit. Dann lassen sich die Maxwell-Gleichungen auch in integraler Form angeben:

- Coulomb

$$\int_{\partial\Omega} (D, \nu) d\omega = Q, \quad (4.5)$$

- Ampère-Maxwell

$$\int_{\partial S} (H, \tau) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (D, \nu) d\omega + I, \quad (4.6)$$

- Faraday

$$\int_{\partial S} (E, \tau) ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (B, \nu) d\omega, \quad (4.7)$$

- Gesetz von der Divergenzfreiheit des B -Feldes

$$\int_{\partial \Omega} (B, \nu) d\omega = 0. \quad (4.8)$$

Wegen der Divergenzfreiheit des B -Feldes, existiert ein Vektorpotential A mit

$$B = \text{rot } A. \quad (4.9)$$

Demnach können wir das Gesetz von Faraday (4.3) folgendermaßen schreiben:

$$\text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0, \quad (4.10)$$

und es existiert folglich ein skalares Potential ϕ , so dass

$$E = -\text{grad } \phi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass

$$D = \epsilon E$$

und

$$B = \mu H$$

mit Konstanten $\epsilon, \mu \in \mathbb{R}$ gelte. Die Gesetze von Coulomb (4.1) und Ampère-Maxwell (4.2) lassen sich nun umformulieren zu

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } A = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.12)$$

und, mit

$$\mu^{-1} \text{rot rot } A = \mu^{-1} (-\Delta A + \text{grad div } A) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) + j,$$

zu

$$\mu^{-1} \Delta A - \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \text{grad} (\mu^{-1} \text{div } A + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -j. \quad (4.13)$$

Schreiben wir statt unseres Vektorpotentials, das wir nun als A_0 bezeichnen,

$$A := A_0 + \text{grad } \Lambda, \quad (4.14)$$

so bleibt B in Gleichung (4.9) unverändert. Statt (4.11) erhalten wir nun

$$E = -\text{grad} \left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Das skalare Potential transformieren wir gemäß

$$\phi := \phi_0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (4.16)$$

Die Gleichungen (4.14) und (4.16) heißen Eichtransformationen. Wählen wir

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (4.17)$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \text{div } A + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \mu^{-1} (\text{div } A_0 + \Delta \Lambda) + \epsilon \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right) \\ &= \mu^{-1} \text{div } A_0 + \epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

so dass die *Lorentzbedingung*

$$\text{div } A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.19)$$

unter der Eichtransformation (4.14) und (4.16) unter der Bedingung (4.17) erhalten bleibt. Diese Eichtransformation mit Bedingung (4.17) wird als *Lorentz-Eichung* bezeichnet.

Unter der Lorentzbedingung (4.19) entkoppeln die beiden inhomogenen Gleichungen (4.12) und (4.13) und ergeben die inhomogenen Wellengleichungen

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.20)$$

und

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -j. \quad (4.21)$$

Wir können statt $B = \text{rot } A$ natürlich auch $H = \text{rot } A$ setzen und als Lorentzbedingung

$$\text{div } A + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.22)$$

verwenden.

Der Hertzsche Vektor

Hier definieren wir A als Vektorpotential mittels

$$H = \text{rot } A .$$

Der Hertzsche Vektor Π ist dann durch

$$A = \epsilon \frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad (4.23)$$

erklärt. Somit gilt gemäß die Lorentzbedingung (4.22)

$$\text{div } A = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \Pi \quad (4.24)$$

und, wenn wir die Integrationskonstante gleich Null wählen,

$$\phi = -\text{div } \Pi . \quad (4.25)$$

Folglich erhalten wir

$$H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi \quad (4.26)$$

und

$$E = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi . \quad (4.27)$$

Im ladungs- und stromfreien Fall genügt Π der homogenen Wellengleichung

$$\Delta \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0 . \quad (4.28)$$

Da $\rho = 0$ ist, gilt auch $\text{div } E = 0$. Demnach existiert ein Vektorpotential A_m , so dass

$$E = -\text{rot } A_m .$$

Mit dem durch

$$A_m = \mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \quad (4.29)$$

erklärten Hertzschen Vektors Π_m schreiben wir nun

$$E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_m \quad (4.30)$$

und

$$H = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi_m . \quad (4.31)$$

Energiedichte und Energiestrom

Mit Hilfe des Ampère-Maxwell-Gesetzes (4.2) erhalten wir

$$\int_{\Omega} (j, E) d^3x = \int_{\Omega} ((E, \operatorname{rot} H) - (E, \frac{\partial D}{\partial t})) d^3x. \quad (4.32)$$

Demnach gilt, gemäß

$$\operatorname{div} (E \times H) = (H, \operatorname{rot} E) - (E, \operatorname{rot} H)$$

und dem Gesetz von Faraday (4.3),

$$\int_{\Omega} (j, E) d^3x = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} (E \times H) + (E, \frac{\partial D}{\partial t}) + (H, \frac{\partial B}{\partial t})) d^3x. \quad (4.33)$$

Nehmen wir an, dass das Medium lineare elektrische und magnetische Eigenschaften besitzt und sich die Gesamtenergiedichte u durch

$$u = \frac{1}{2}((E, D) + (B, H)) \quad (4.34)$$

ausdrücken lässt, dann folgt aus (4.33)

$$- \int_{\Omega} (j, E) d^3x = \int_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} (E \times H)) d^3x. \quad (4.35)$$

Mit dem Poynting-Vektor S , definiert durch

$$S := E \times H \quad (4.36)$$

erhalten wir den Energieerhaltungssatz als Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} S = -(j, E). \quad (4.37)$$

Beispiel

Eine ebene, ungedämpfte elektromagnetische Welle hat die Energiedichte

$$u = \frac{1}{2}(ED + HB) = \epsilon E^2 = \mu H^2$$

und die Energiestromdichte

$$|S| = EH = cu.$$

Die Intensität I ist der Zeitmittelwert von S , d.h.

$$I = c\bar{u} = c\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2}c\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}c\mu H_0^2.$$

4.1.2 Randwert- und Anfangswertprobleme

Setzen wir $\rho = 0$, $j = 0$, $\epsilon = 1$ und $\mu = 1$ voraus, so nehmen die Maxwellschen Gleichungen folgende Form an:

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x, t) = \text{rot } H(x, t), \quad (4.38)$$

$$\text{div } E(x, t) = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = -\text{rot } E(x, t), \quad (4.40)$$

$$\text{div } H(x, t) = 0. \quad (4.41)$$

Definition 4.1 Sei $(E_0, H_0) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$. Wir bezeichnen

$$(E, H) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3), C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3))$$

als (klassische) Lösung des Cauchyproblems für die Maxwell-Gleichungen im \mathbb{R}^3 , wenn (E, H) die Gleichungen (4.38 - 4.41) erfüllt und den Anfangsbedingungen

$$E(x, 0) = E_0(x) \text{ und } H(x, 0) = H_0(x) \quad (4.42)$$

genügt.

Satz 4.2 Genügt (E, H) den Voraussetzungen der Definition 4.1 und gilt

$$\text{div } E_0(x) = \text{div } H_0(x) = 0, \quad (4.43)$$

dann gibt es genau eine Lösung $(E, H)(x, t)$ des Cauchyproblems für die Maxwell-Gleichungen und es gilt

$$E(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \text{rot } H_0(y) dy + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|y-x|=t} E_0(y) dy \right) \quad (4.44)$$

und

$$H(x, t) = -\frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \text{rot } E_0(y) dy + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|y-x|=t} H_0(y) dy \right). \quad (4.45)$$

Randwertprobleme für einen kreiszylindrischen Hohlleiter

Wir betrachten in Richtung der Zylinderachse $x_1 = z$ fortschreitende Wellen von Π , so dass für den Hertzschen Vektor $\Pi = (\Pi_1, 0, 0)$ gesetzt wird. Außerdem gehen wir davon aus, dass sich die x_1 -Komponente des Hertzschen Vektors in Form einer ebenen Welle darstellen lässt mit

$$\Pi_1 = \Pi_1(x_2, x_3) e^{i(\omega t - k_1 x_1)}, \quad (4.46)$$

wobei $k_1 = 2\pi\lambda_h^{-1}$ mit der Hohlleiterwellenlänge λ_h . Dieser Ansatz ist hier im Sinne einer Näherung zu verstehen.

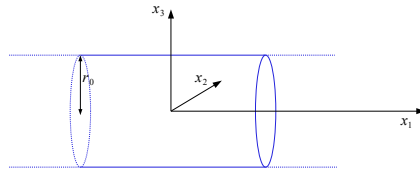


Abbildung 4.1 Ein kreiszylindrischer Hohlleiter

Die Komponente Π_1 des Hertzschen Vektors genügt der Helmholtzschen Schwingungsgleichung

$$\Delta \Pi_1 + k^2 \Pi_1 = 0. \quad (4.47)$$

Weiterhin erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + s^2 \right) \Pi_1(r, \varphi) = 0, \quad (4.48)$$

mit

$$s^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2.$$

Wir schreiben

$$\Pi_1(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$$

Wie in der Lösung zum Cauchy-Problem für eine kreisförmige Membran, existieren $m \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Pi_1. \quad (4.49)$$

Demnach genügt f der Besselschen Differentialgleichung

$$r^2 f'' + r f' + (s^2 r^2 - m^2) f = 0 \quad (4.50)$$

und es gilt $f = J_m(sr)$. Somit erhalten wir mittels

$$\Pi_1(\varphi, r, x_1, t) = A J_m(sr) \cos(m\varphi) e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \quad (4.51)$$

eine Lösung. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) werden Gradient, Divergenz und Rotation folgendermaßen dargestellt:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z,$$

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

und

$$\text{rot } A = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) e_z.$$

Demnach gilt

$$\text{grad div } \Pi = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r \partial z} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi \partial z} e_\varphi + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2} e_z \quad (4.52)$$

und

$$\text{rot } \Pi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi} e_r - \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} e_\varphi. \quad (4.53)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.26) und (4.27) erhalten wir somit

$$H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi \quad (4.54)$$

$$= -i\omega\epsilon A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left(m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_r + s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_\varphi \right)$$

und

$$E = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi \quad (4.55)$$

$$= s^2 \Pi_1 e_z - i k_1 A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left(s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_r - m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_\varphi \right).$$

Da $H_1 = 0$ und damit das Magnetfeld transversal zu x_1 ist, nennen wir diese Lösungen *TM-Wellen*, wenn diese zusätzlich der Randbedingung (4.58) genügen.

Entsprechend implizieren die Gleichungen (4.30) und (4.31)

$$E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_m \quad (4.56)$$

$$= i\omega\mu A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left(m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_r + s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_\varphi \right)$$

und

$$H = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial t^2} + \text{grad div } \Pi_m \quad (4.57)$$

$$= s^2 \Pi_1 e_z - i k_1 A e^{i(\omega t - k_1 x_1)} \left(s J'_m(sr) \cos(m\varphi) e_r - m \frac{J_m(sr)}{r} \sin(m\varphi) e_\varphi \right).$$

Da $E_1 = 0$ und damit das elektrische Feld transversal zu x_1 ist, nennen wir diese Lösungen *TE-Wellen*, wenn diese zusätzlich der Randbedingung (4.58) genügen.

Da für die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke E_t die Randbedingung

$$E_t|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.58)$$

gilt, folgt für *TM-Wellen*

$$E_1 = 0, \quad E_\varphi = 0 \quad \text{für } r = r_0$$

und für *TE-Wellen*

$$E_\varphi = 0 \quad \text{für } r = r_0.$$

Das impliziert, dass bei

- TM-Wellen

$$sr_0 = \kappa_{ml} ,$$

wobei κ_{ml} die Nullstellen der Besselfunktion erster Art und m -ter Ordnung J_m sind,

- TE-Wellen

$$sr_0 = \tilde{\kappa}_{ml} ,$$

wobei $\tilde{\kappa}_{ml}$ die Nullstellen von J'_m sind.

Damit können Knotenzyylinder des Hohlleiterquerschnitts anhand der Nullstellen von J_m und Knotenflächen mittels der Nullstellen von $\cos(m\varphi)$ dargestellt werden:

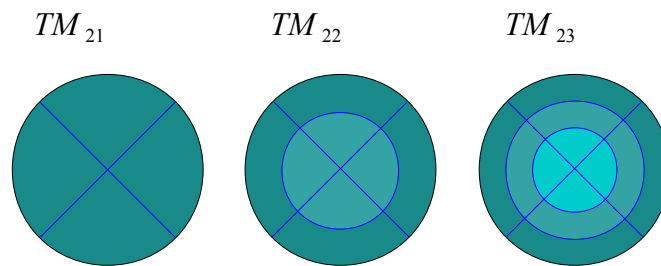


Abbildung 4.2 Knotenflächen für TM_{2l} , $l = 1, 2, 3$

Bei TM-Wellen lautet hier die elektrische Feldstärke in Axialrichtung

$$E_1 = As^2 J_m(sr) \cos(m\varphi) e^{i(\omega t - k_1 x_1)}.$$

Für $m = 3$ und $l = 3$ lässt sich diese im Querschnitt des Hohlleiters zu einem festen Zeitpunkt folgendermaßen abbilden:

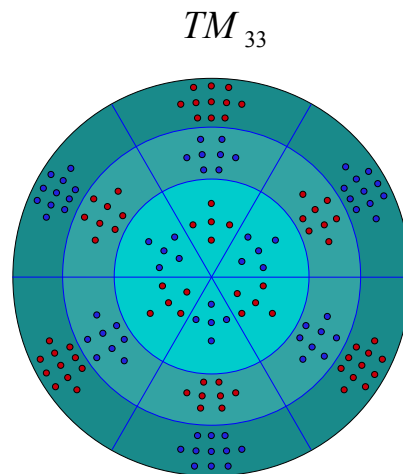


Abbildung 4.3 Richtung von E_1 und Knotenflächen für TM_{33}

Im Rahmen von elektro- oder magnetostatischen Problemen tritt beispielsweise folgendes Randwertproblem auf:

Definition 4.3 Dirichlet-Problem $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, das aus endlich vielen disjunkten, jeweils zusammenhängenden, C^∞ -berandeten Gebieten besteht. Die Anzahl beschränkter Zusammenhangskomponenten von $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ beträgt m . Ferner sei $E_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $0 < \alpha < 1$ und $h \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, $g \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, $\gamma \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ und

$$(\nu, \gamma) = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Gesucht ist ein $f \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\operatorname{div} f = h, \quad (4.59)$$

$$\operatorname{rot} f = g, \quad (4.60)$$

$$-\nu \times f = \gamma \text{ auf } \partial\Omega, \quad (4.61)$$

$$-\int_{\partial\Omega} (\nu, f) \hat{h}^i|_{\partial\Omega} d\omega = E^i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.62)$$

Eine ausführliche Behandlung dieses Problems findet man in [29] und [52]. Diese Randwertaufgabe steht außerdem in einem engen Zusammenhang mit dem Stokes-System, wie beispielsweise in [52] gezeigt wird.

Sei

$$Z(\Omega) := \{z \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^\rho(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} z = 0, \operatorname{rot} z = 0, (\nu, z)|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (4.63)$$

wobei $0 < \rho < 1$ gelte. Elemente aus $Z(\Omega)$ werden als Neumann-Felder in Ω bezeichnet. Ferner sei $\hat{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ und

$$H(\hat{\Omega}) := \{h \in C^0(\bar{\hat{\Omega}}) \cap C^1(\Omega) \mid \operatorname{grad} h = 0, |h(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-2}) \text{ für } |x| \rightarrow \infty\}. \quad (4.64)$$

Unter $\{\hat{h}^1, \dots, \hat{h}^m\}$ verstehen wir eine Basis von $H(\hat{\Omega})$.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, $v \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $S \subset \Omega$ eine glatte, doppelpunkt-freie, geschlossene und orientierte Fläche und die Einheitsnormale ν so gewählt, dass ν positiv orientiert hinsichtlich der Orientierung von S ist, dann heißt

$$E := \int_S (\nu, f) d\omega \quad (4.65)$$

die *Ergiebigkeit* des Feldes f bezüglich der Fläche S . Ein Feld f wird als *ergiebigkeitsfrei* bezeichnet, wenn die Ergiebigkeit bezüglich jedes $S \subset \Omega$ verschwindet.

Satz 4.4 Integrabilitätsbedingungen

Für die Lösbarkeit des Problems $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$ durch ein Feld f müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(i) g ist ergiebigkeitsfrei, d. h.

$$\int_S (\nu_S, f) d\omega = 0 \text{ für alle } S \subset \Omega. \quad (4.66)$$

(ii) Für die Flächendivergenz div_S von γ gilt

$$\text{div}_S \gamma = (\nu, \gamma), \text{ falls } f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3). \quad (4.67)$$

(iii) Weiterhin gilt

$$\int_{\Omega} (g, z) dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma, z) d\omega \text{ für alle } z \in Z(\Omega) \quad (4.68)$$

Satz 4.5 Lösung des des Problems $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$

(i) Sei f eine Lösung von $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$. Dann genügt die Normalkomponente $\epsilon = -(\nu, f)$ auf Ω der Integralgleichung

$$\begin{aligned} \epsilon(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial\nu} \right) (x, x') \epsilon(x') d\omega_{x'} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} (\nu(\xi), \text{grad} \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon(x')}{|x - x'|} dx' - \text{rot} \left(\int_{\Omega} \frac{g(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\gamma(x')}{|x - x'|} \right)), \end{aligned} \quad (4.69)$$

wobei $x \in \partial\Omega$, und den Nebenbedingungen

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon \hat{h}^i|_{\partial\Omega} d\omega = E^i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.70)$$

(ii) Ist $\epsilon \in C^0(\partial\Omega)$ Lösung der Integralgleichung (4.69), genügt den Nebenbedingungen (4.70), ist $\gamma \in C^1(\partial\Omega)$, $g \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und gelten die Integrabilitätsbedingungen des Theorems 4.4, dann ist f mit

$$f = -\text{grad } U + \text{rot } A, \quad (4.71)$$

wobei U gegeben ist durch das skalare Potential

$$U(x) := \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega} \frac{h(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\epsilon(x')}{|x - x'|} d\omega'_x \right) \quad (4.72)$$

und A durch das Vektorpotential

$$A(x) := \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega} \frac{g(x')}{|x - x'|} dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\gamma(x')}{|x - x'|} d\omega'_x \right), \quad (4.73)$$

Lösung des Problems $D(\Omega, h, g, \gamma, E^1, \dots, E^m)$.

4.2 Die Schrödinger-Gleichung

4.2.1 Physikalische Grundlagen

Unter einer Schrödinger-Gleichung verstehen wir beispielsweise eine Gleichung der Form

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - V(x) \right) \psi = 0 \quad (4.74)$$

Während wir bei dieser Gleichung $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$ setzen, betrachten wir auch Gleichungen der Form

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (4.75)$$

wobei $\psi_0 \in D(H) := C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ sein kann, falls der Operator H beispielsweise gegeben ist⁶ durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - Ze^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} + e^2 \sum_{j>k} \frac{1}{r_{jk}}. \quad (4.76)$$

Dieser Fall tritt bei ortsfesten Atomen mit Kernladungszahl Z und n Elektronen auf. Im Falle eines Wasserstoffatoms, können wir demnach hier

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \quad (4.77)$$

und $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ schreiben. Um hierbei auch ein zeitlich unveränderliches äußeres elektromagnetisches Feld zu berücksichtigen, bietet sich an

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e}{c} A_j(x) \right)^2 - \frac{e^2}{r} + eV(x) \quad (4.78)$$

zu setzen. Betrachten wir statt des Wasserstoffatoms einen Atomkern mit Kernladungszahl Z und einem Elektron in der Hülle, so ersetzen wir Gleichung (4.77) durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze^2}{r}. \quad (4.79)$$

Für das neutrale Heliumatom schreiben wir stattdessen

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

und $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$.

⁶wobei hier $4\pi\epsilon_0 = 1$ gesetzt wurde

Unsere Operatoren können wir mittels

$$H = \sum_{j=1}^m (D_j - b_j)^2 + q, \quad \text{wobei } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j}, \quad (4.80)$$

zusammenfassen. Dabei sei $b_j \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $q \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ und $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Vorerst beschränken wir uns jedoch auf Fälle mit $b_j = 0$ und Wechselwirkungen zwischen dem Atomkern und einem Elektron.

Mittels (4.75) erhalten wir

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\psi}\psi) = \bar{\psi}H\psi - \psi\bar{H}\bar{\psi}, \quad (4.81)$$

was, im Falle von

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V, \quad \text{mit } V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

mit der Definition der *Wahrscheinlichkeitsstromdichte*

$$j := \frac{\hbar}{2mi}(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}), \quad (4.82)$$

die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (4.83)$$

annimmt. Da hierbei für die *Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$\rho = \bar{\psi}\psi = |\psi|^2 \quad (4.84)$$

gilt, erhalten wir eine anschauliche Interpretation der Größe ψ .

Zu den *Axiomen der Quantenmechanik* gehört, die Aussage, dass sich der Systemzustand $\psi(t)$ zum Zeitpunkt $t > 0$ durch den Zustand ψ_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, der als Element eines Hilbertraumes mit Norm $\|\psi_0\| = 1$ vorausgesetzt wird, mittels

$$\psi(t) = \exp(-i\frac{t}{\hbar}H)\psi_0 \quad (4.85)$$

berechnen lässt.

Ein quantenmechanischer Zustand heißt *stationär*, wenn der Hamilton-Operator H zeitunabhängig ist. Wird ein quantenmechanischer Systemzustand ψ als Element eines Hilbertraumes mit Norm $\|\psi\| = 1$ charakterisiert, so ist der Zustand genau dann stationär, wenn ψ ein Element des Hamilton-Operators H , d. h.

$$H\psi = E\psi, \quad (4.86)$$

ist. Demnach gilt

$$\psi(x, t) = \psi_0(x) \exp(-i\frac{t}{\hbar}E). \quad (4.87)$$

4.2.2 Lösungstheorie

Nach [50] gilt:

Satz 4.6 *Der zu dem Differentialausdruck*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r} \quad (4.88)$$

gehörige Operator H mit $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ist in $L^2(\mathbb{R}^3)$ wesentlich selbstadjungiert und halbbeschränkt. Weiterhin gilt

(i) *für den Definitionsbereich*

$$D(\bar{H}) = W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$$

(ii) *für das kontinuierliche Spektrum*

$$\sigma_c(\bar{H}) = [0, \infty)$$

(iii) *für das Punktspektrum⁷*

$$\sigma_p(\bar{H}) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lambda_n := -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

(iv) *für den Eigenraum*

$$\dim(N(\lambda_n I - \bar{H})) = n^2$$

(v) *und*

$$N(\lambda_n I - \bar{H}) = (r^{-\frac{1}{2}} L_{2l+1, n-l-1}(\rho) S_m^{(l)}(\vartheta), r^{-\frac{1}{2}} L_{2l+1, n-l-1}(\rho) \tilde{S}_{m'}^{(l)}(\vartheta))_{l, m, m'},$$

wobei

$$\rho := \frac{2me^2}{\hbar^2 n} r$$

und $0 \leq l \leq n-1, 0 \leq m \leq l, 1 \leq m' \leq l$.

⁷ wobei hier $4\pi\epsilon_0 = 1$ gesetzt wurde

Diskretes Energiespektrum eines Teilchens ohne Spin im Coulomb-Feld

Wir betrachten das Anfangswertproblem der Schrödingergleichung

$$i\hbar\psi'(t) = H\psi(t), \psi(0) = \psi_0,$$

wobei der Hamilton-Operator H wie in Gleichung (4.79) durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{r} \quad (4.89)$$

gegeben ist und $\psi_0 \in D(H)$ gilt. Statt ψ_0 schreiben wir nun ψ .

Weiterhin lässt sich der Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten ausdrücken:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\Lambda}{r^2} \quad (4.90)$$

mit

$$\Lambda := \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Der Drehimpulsoperator \mathcal{L} ist definiert durch

$$\mathcal{L} = -i\hbar(r \times \nabla) \quad (4.91)$$

und demnach beispielsweise \mathcal{L}_z durch

$$\mathcal{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4.92)$$

und in Kugelkoordinaten, mit $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$,

$$\mathcal{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.93)$$

$$\mathcal{L}_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (4.94)$$

$$\mathcal{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (4.95)$$

und

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (4.96)$$

Eigenwertgleichungen für \mathcal{L}_z und \mathcal{L}^2

Für \mathcal{L}_z aus Gleichung (4.92) erhalten wir die Eigenwertgleichung

$$-i\hbar \frac{\partial \psi(\varphi)}{\partial \varphi} = L_z \psi(\varphi) \quad (4.97)$$

und als Lösungen

$$\psi(\varphi) = A \exp(i \frac{L_z}{\hbar} \varphi). \quad (4.98)$$

Weiterhin gilt

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

und demnach

$$L_z = \hbar m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Für \mathcal{L}^2 aus Gleichung (4.96) erhalten wir die Eigenwertgleichung

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi(\vartheta, \varphi) = L^2 \psi(\vartheta, \varphi). \quad (4.99)$$

Falls

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1),$$

sind

$$\psi(\vartheta, \varphi) = S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) \quad (4.100)$$

und

$$\psi(\vartheta, \varphi) = \tilde{S}_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) \quad (4.101)$$

Lösungen der Gleichung (4.99). Dabei sind $S_m^{(l)}$ und $\tilde{S}_m^{(l)}$ Kugelflächenfunktionen des Grades $l \in \mathbb{N}_0$ auf der Oberfläche der Einheitskugel ω_3 . Die Zahl l heißt in dem dargestellten Zusammenhang *Nebenquantenzahl*, die Zahl m *magnetische Quantenzahl*.

Mit den zugeordneten Legendre-Polynomen aus Gleichung (2.59),

$$P_l^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}} (1-t^2)^l, \quad m = 0, 1, \dots, l,$$

und

$$S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!2\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, \dots, l,$$

$$\tilde{S}_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!2\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) \sin(m\varphi), \quad m = 1, \dots, l,$$

$0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$, erhalten wir ein orthonormiertes System von Kugelflächenfunktionen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} S_0^{(l)}, S_1^{(l)}, \dots, S_l^{(l)}, \tilde{S}_1^{(l)}, \dots, \tilde{S}_1^{(l)} \mid l \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Eigenwertgleichung für H

Wir nehmen wieder an, dass sich die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion durch einen Faktor der Form

$$\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$$

ausdrücken lässt. Dann lässt sich der ortsabhängige Anteil der Wellenfunktion für diese stationären Zustände, mit bestimmten Werten von L^2 und L_z , in einem kugelsymmetrischen Feld als

$$\psi_{E,l,m} = f_{E,l}(r) S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \psi_{E,l,m} = f_{E,l}(r) \tilde{S}_m^{(l)}(\vartheta, \varphi)$$

schreiben.

Für $R(r) := r f_{E,l}(r)$ erhalten wir

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2mZe^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0$$

und, mit

$$a := \frac{\hbar^2}{mc^2}, \quad E_a := \frac{e^2}{a}, \quad \rho := \frac{r}{a},$$

$$\alpha^2 := -2 \frac{E}{E_a}, \tag{4.102}$$

die Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \alpha^2 + \frac{2Z}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0 \tag{4.103}$$

mit dimensionslosen Koeffizienten. Zumal

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R(\rho) - (Ae^{-\alpha\rho} + Be^{\alpha\rho})) = 0$$

mit Konstanten A und B und, wegen der Beschränktheit der Wellenfunktion, $B = 0$ sein muss, setzen wir

$$R(\rho) = e^{-\alpha\rho} \rho^{l+1} \sum_{\nu=0}^{n_r} \beta_\nu \rho^\nu \quad (4.104)$$

und bestimmen β_ν durch Koeffizientenvergleich. Das führt auf die Rekursionsformel

$$\beta_{\nu+1} = \frac{2(\alpha(\nu + l + 1) - Z)}{(\nu + l + 2)(\nu + l + 1) - l(l + 1)} \beta_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Da die Potenzreihe (4.104) bei $\nu = n_r$ abbrechen soll, muss

$$\alpha(n_r + l + 1) = Z \quad (4.105)$$

sein. Die Größe

$$n := n_r + l + 1 \quad (4.106)$$

wird als *Hauptquantenzahl* bezeichnet. Mit (4.102) und (4.105) erhalten wir

$$\frac{E}{E_a} = -\frac{Z^2}{2n^2}. \quad (4.107)$$

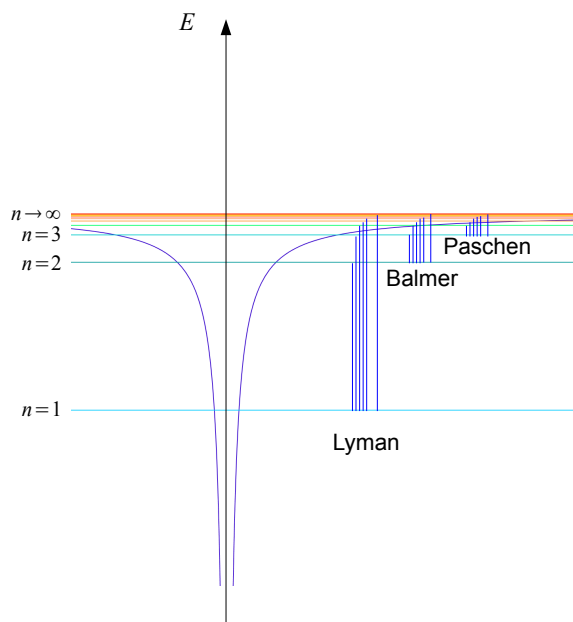


Abbildung 4.4 Energieniveaus und Spektralserien des Wasserstoffatoms

Für die radialen Wellenfunktionen $f(\rho) := \rho^{-1}R(\rho)$, mit $Z = 1$ und

$$\int_0^{\infty} f^2(\rho) \rho^2 d\rho = 1,$$

gilt

Zustand	n_r	$f(\rho)$
1s	0	$2 \exp(-\rho)$
2s	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{\rho}{2}) \exp(-\frac{\rho}{2})$
2p	0	$\frac{1}{2\sqrt{6}}\rho \exp(-\frac{\rho}{2})$
3s	2	$\frac{2}{3\sqrt{3}}(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2) \exp(-\frac{\rho}{3})$
3p	1	$\frac{8\rho}{27\sqrt{6}}(1 - \frac{1}{6}\rho) \exp(-\frac{\rho}{3})$
3d	0	$\frac{4}{81\sqrt{30}}\rho^2 \exp(-\frac{\rho}{3})$

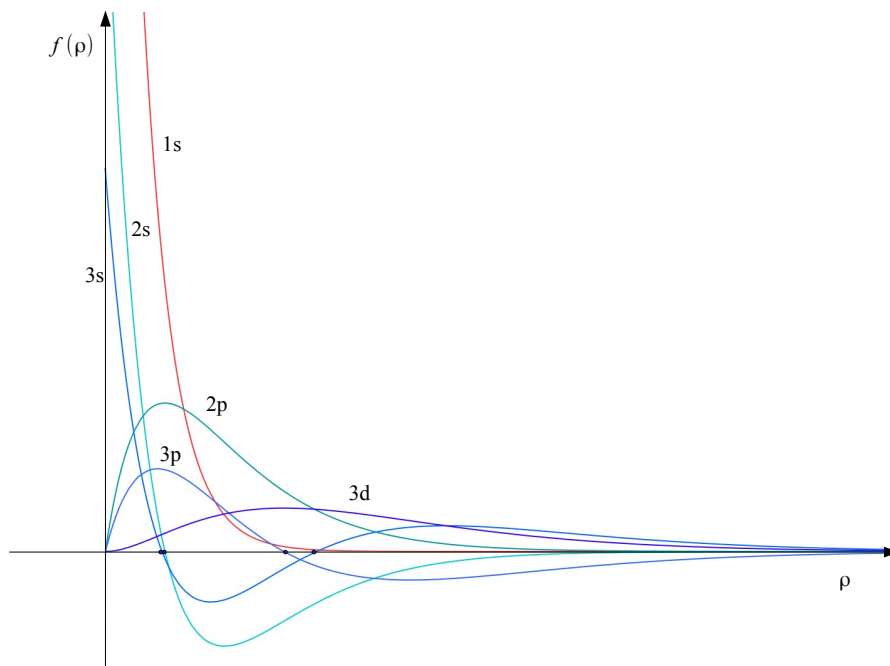


Abbildung 4.5 Radiale Wellenfunktion des Wasserstoffatoms

Auch für sehr allgemeine Potentiale lassen sich noch wichtige Ergebnisse erzielen:

Hierzu betrachten wir den Hamilton-Operator H der Gleichung (4.80). Sei $q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ mit $q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ und $\rho \in \mathbb{R}$ und

$$M_{q,\rho}(x) = \begin{cases} \left(\int_{|x-y| \leq 1} |q(y)|^2 |x-y|^{\rho-m} dy \right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \rho < m \\ \left(\int_{|x-y| \leq 1} |q(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \rho \geq m. \end{cases} \quad (4.108)$$

Wir schreiben $q \in M_\rho(\mathbb{R}^m)$, falls $q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ und zusätzlich $M_{q,\rho}(\cdot)$ beschränkt ist.

Nach [53], Satz 10.22 gilt:

Satz 4.7 Sind neben $b_j \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $j = 1, \dots, m$, auch deren Ableitungen beschränkt und $q \in M_\rho(\mathbb{R}^m)$ für ein $\rho < 4$, so

- (i) ist der Operator H wesentlich selbstadjungiert,
- (ii) $D(\bar{H}) = W^{2,2}(\mathbb{R}^m)$ und
- (iii) H ist nach unten halbbeschränkt.

4.3 Die Dirac-Gleichung

Freie Bewegung eines Fermions mit Spin $\frac{1}{2}$ nach der Dirac-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung ist nicht invariant unter der Gruppe linearer Transformationen

$$x'_\nu = \sum_{\mu=1}^4 a_{\nu\mu} x_\mu, \quad \nu = 1, \dots, 4, \quad (4.109)$$

mit

$$\det(a_{\nu\mu}) = \pm 1,$$

d. h. der Gruppe der Lorentz-Transformationen.

Dirac stellte 1928 eine Gleichung auf, die sich zur Beschreibung relativistischer Fermionen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ eignet. Dabei führte er ein System von Funktionen $\psi_\nu(x, t)$, $\nu \in \mathbb{N}$, ein, womit die elektrische Ladungsdichte ρ_e mittels

$$\rho_e = e \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \overline{\psi}_\nu \psi_\nu \quad (4.110)$$

bestimmt wird. Hierbei setzen wir voraus, dass $\psi_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ und $\psi_\nu(\cdot, t)$ einen kompakten Träger hat. Nach dem Erhaltungssatz der elektrischen Ladung muss

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_e dx = e \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \overline{\psi}_\nu}{\partial t} \psi_\nu + \overline{\psi}_\nu \frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} \right) dx = 0 \quad (4.111)$$

gelten und ψ_ν Lösung eines Systems partieller Differentialgleichungen für $(\psi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ erster Ordnung in t und wegen der relativistischen Invarianz auch erster Ordnung in x_k , $k = 1, 2, 3$, sein. Ein solches Gleichungssystem kann folgende Form haben:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} + \sum_{1 \leq k \leq 3} \sum_{1 \leq \mu \leq 4} \alpha_{k,\nu\mu} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_k} + i \frac{mc}{\hbar} \sum_{1 \leq \mu \leq 4} \alpha_{4,\nu\mu} \psi_\mu = 0, \quad (4.112)$$

wobei $\alpha_{k,\nu\mu} \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, 4$, Konstanten seien.

Sei $\sigma = (\sigma_{kl})_{1 \leq k, l \leq m} \in M(m \times m, \mathbb{C})$ und $\sigma^* = (\sigma_{kl}^*)_{1 \leq k, l \leq m} \in M(m \times m, \mathbb{C})$, mit $\sigma_{kl}^* = \overline{\sigma_{lk}}$, die zu σ adjungierte Matrix.

Die Pauli-Matrizen oder Spinmatrizen sind gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.113)$$

Diese sind selbstadjungiert und sie bilden ein antikommutierendes normiertes System, d. h.

$$\sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k = 2 \begin{pmatrix} \delta_{kl} & 0 \\ 0 & \delta_{kl} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k, l \leq 3. \quad (4.114)$$

Eine Matrix $\alpha \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ schreiben wir üblicherweise als

$$\alpha = (\alpha_{ik})_{1 \leq i, k \leq 4} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_{ik} \in \mathbb{C}$. Stattdessen können wir aber auch $\alpha_{ik} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ setzen und

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

notieren. Ist zudem

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

mit $\beta_{ik} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, so gilt

$$\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.115)$$

Weiterhin gilt für die adjungierte Matrix α^*

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

Im Rahmen dieser Schreibweise mittels zweireihiger quadratischer Matrizen, sei außerdem

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrizen $(\alpha_k) \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$, $k = 1, \dots, 5$, mit

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.117)$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (4.118)$$

$$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

gilt

$$\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2 \begin{pmatrix} \delta_{kl} I & 0 \\ 0 & \delta_{kl} I \end{pmatrix}, \quad k, l = 1, \dots, 5, \quad \text{und} \quad \alpha^{(k)} = (\alpha^{(k)})^*. \quad (4.120)$$

Wie sich leicht zeigen lässt, müssen für die Matrizen α_k aus Gleichung (4.112) die Bedingungen

$$(\alpha_4)^2 = I, \quad \alpha_k \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_k = 0, \quad (4.121)$$

$$\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl} I, \quad \text{mit } k, l = 1, 2, 3,$$

gelten. So können wir (4.120) nutzen, um zu zeigen, dass die in (4.117) und (4.118) definierten Matrizen $(\alpha^{(k)})$ diese Bedingungen erfüllen und für Gleichung (4.112) verwendet werden können.

Nun gehen wir von der Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (4.122)$$

mit

$$H := c \sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k + mc^2 \alpha_4 \quad (4.123)$$

und

$$D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4),$$

aus. Die letztgenannte Bezeichnungsweise bedeutet, dass der Definitionsbereich aus Funktionen

$$\psi(x, t = 0) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^t(x, t = 0)$$

mit

$$\psi_\nu(., t = 0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \psi_\nu(., t = 0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

besteht.

Der Operator H ist wesentlich selbstadjungiert und es gilt

$$D(\bar{H}) = W^{1,2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \quad (4.124)$$

und

$$\sigma_p(H) = \emptyset, \quad \sigma_c(H) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty). \quad (4.125)$$

Für die stationären Zustände gilt

$$\psi(x, t) = \psi_0(x) \exp(-i \frac{Et}{\hbar}). \quad (4.126)$$

Schreiben wir

$$\psi_0(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

mit

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t=0) \\ \psi_2(x, t=0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi(x) = \begin{pmatrix} \psi_3(x, t=0) \\ \psi_4(x, t=0) \end{pmatrix}, \quad (4.128)$$

so erhalten wir

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c(\sigma, p) \\ c(\sigma, p) & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.129)$$

wobei

$$(\sigma, p) := \sum_{k=1}^3 \sigma_k p_k \quad (4.130)$$

gesetzt wurde. Für nichttriviale Lösungen muss

$$\det \begin{pmatrix} mc^2 - E & c(\sigma, p) \\ -c(\sigma, p) & mc^2 + E \end{pmatrix} = 0 \quad (4.131)$$

sein, was zu

$$E = \pm c \sqrt{|p|^2 + mc^2} \quad (4.132)$$

führt. Mittels (4.129) erhalten wir

$$\chi = \frac{c(\sigma, p)}{mc^2 + E} \varphi. \quad (4.133)$$

Mit der ortsunabhängige Spinfunktion

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (4.134)$$

wobei $|u| = 1$, können wir φ als

$$\varphi = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{mc^2 + E}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} u \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p, x)\right) \quad (4.135)$$

schreiben.

Für eine nichtrelativistische Näherung mit $E > 0$ schreiben wir

$$E = mc^2 + E' \quad \text{mit} \quad E' \ll mc^2. \quad (4.136)$$

Demnach gilt

$$\chi \approx \frac{1}{2mc}(\sigma, p) \ll \varphi. \quad (4.137)$$

4.4 Die Klein-Gordon-Gleichung

4.4.1 Physikalische Grundlagen

Nach Definition der Energie- und Impulsoperatoren durch

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p = -i\hbar \nabla, \quad (4.138)$$

erhalten wir, mittels

$$\frac{|E|^2}{c^2} = |p|^2 + m^2 c^2, \quad (4.139)$$

als relativistische Gleichung für ein freies Teilchen mit Spin Null:

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - (\hbar^2 \Delta - m^2 c^2) \psi = 0. \quad (4.140)$$

Diese Gleichung wurde 1926 von Klein, Fock und Gordon vorgeschlagen.

Setzen wir wieder $x \in \mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}_+$ mit $x_4 = ict$ und

$$p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 1, \dots, 4, \quad (4.141)$$

so erhalten wir

$$\left(\sum_{\mu=1}^4 p_\mu^2 + m^2 c^2 \right) \psi = 0. \quad (4.142)$$

Nach einfacher Rechnung erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad (4.143)$$

wobei

$$\rho := \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) \quad (4.144)$$

und

$$j := \frac{\hbar}{2mi} (\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}). \quad (4.145)$$

Betrachten wir $j \in \mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$, mit

$$j = (j_1, j_2, j_3, ic\rho), \quad (4.146)$$

so können wir die Kontinuitätsgleichung umformulieren in

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad (4.147)$$

wobei

$$j_{\mu} = \frac{\hbar}{2mi} (\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}}). \quad (4.148)$$

Um die Schrödinger-Gleichung unter der Bedingung $E' := E - mc^2 \ll mc^2$ zu erhalten, setzen wir

$$\varphi(x, t) := \psi(x, t) \exp\left(\frac{imc^2}{\hbar} t\right) \quad (4.149)$$

und erhalten

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{mc^2}{\hbar} \varphi \right) \exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar} t\right) \approx -i \frac{mc^2}{\hbar} \varphi \exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar} t\right), \quad (4.150)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \approx -\left(i \frac{2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right) \exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar} t\right). \quad (4.151)$$

Demnach ergibt sich mittels der Klein-Gordon-Gleichung (4.140) die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi = 0. \quad (4.152)$$

Auf den ersten Blick erstaunlich ist die Tatsache, dass ρ negative Werte annehmen kann. Da allerdings Teilchenpaare erzeugt und vernichtet werden können, ist die Teilchenzahl in der relativistischen Quantentheorie keine Erhaltungsgröße. Multiplizieren wir (4.144) und (4.145) jeweils mit der elektrischen Ladung e , so erhalten wir die Ladungsdichte

$$\rho := \frac{ie\hbar}{2mc^2} (\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}) \quad (4.153)$$

und die elektrische Stromdichte

$$\mathbf{j} := \frac{e\hbar}{2mi} (\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}). \quad (4.154)$$

Die Kontinuitätsgleichung drückt nun die Erhaltung der Gesamtladung aus. Die Ladungsdichte kann selbstverständlich negative oder positive Werte annehmen, oder auch identisch 0 sein.

4.4.2 Lösungstheorie

Freie Bewegung nach der Klein-Gordon-Gleichung

Setzen wir

$$\psi(x, t) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}((p, x) - Et)\right), \quad (4.155)$$

wobei $A \in C$ eine Konstante ist, in die Klein-Gordon-Gleichung (4.140) ein, so erhalten wir

$$E = \pm c \sqrt{|p|^2 + m^2 c^2}. \quad (4.156)$$

Mittels (4.144) folgt weiterhin

$$\rho = \frac{eE}{mc^2} \bar{\psi} \psi. \quad (4.157)$$

Statt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in t zu betrachten, können wir auch ein System zweier Differentialgleichungen betrachten, die nur erste Ableitungen in t besitzen. Hierzu verwenden wir die Gleichung

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \tilde{H}) \tilde{\psi} = 0, \quad (4.158)$$

wobei

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.159)$$

und

$$\tilde{H} := -(\sigma_3 + i\sigma_2) \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + mc^2 \sigma_3. \quad (4.160)$$

Dabei verstehen wir unter σ_k die Pauli-Matrizen. Anwendung von

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{H}$$

auf Gleichung (4.158) zeigt, dass φ und χ Lösungen von (4.140) sind.

Ein freies Teilchen mit Spin 0 in einem Volumen V wird mittels

$$\tilde{\psi} = V^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}((p, x) - Et)\right). \quad (4.161)$$

beschrieben. Für eine nichtrelativistische Näherung erhalten wir

$$|E| \approx mc^2 + \frac{|p|^2}{2m}$$

Im Falle $E > 0$ gilt

$$\varphi_0 \approx 1, \quad |\chi_0| \ll 1 \quad (4.162)$$

und, im Falle $E < 0$,

$$\varphi_0 \ll 1, \quad |\chi_0| \approx 1. \quad (4.163)$$

4.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Diskretes Energiespektrum eines Teilchens ohne Spin im Coulomb-Feld

a) Zeigen Sie, dass für die Komponenten des Drehimpulsoperators

$$\mathcal{L} = -i\hbar(r \times \nabla)$$

im \mathbb{R}^3

$$\mathcal{L}_x = i\hbar(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}),$$

$$\mathcal{L}_y = -i\hbar(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}),$$

$$\mathcal{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

gilt und wir

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

schreiben können.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwertgleichung

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = E\psi$$

mit

$$\psi = \psi_{E,l,m} = f_{E,l}(r) S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi)$$

und $R(r) := r f_{E,l}(r)$ auf die Gleichung

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2mZe^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0$$

führt und bestimmen Sie $f(r)$ zu den Hauptquantenzahlen $n \leq 3$ für das Wasserstoffatom.

Hinweis: Es gilt

$$-\left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) S_m^{(l)}(\vartheta, \varphi).$$

Aufgabe 2

In $L^2(\mathbb{R})$ betrachten wir den Ortsoperator X

$$(Xf)(x) := xf(x) \text{ mit } D(X) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid xf \in L^2(\mathbb{R})\}$$

und den Impulsoperator P

$$(Pf)(x) := -i \frac{d}{dx} f(x) \text{ mit } D(P) = C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass X selbstadjungiert und P wesentlich selbstadjungiert ist.

Aufgabe 3

Der Hamiltonoperator H eines Elektrons im Magnetfeld B ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} A \right)^2,$$

wobei

$$\text{rot } A = B.$$

a) Sei

$$B_i = |B| \delta_{i3}, i = 1, 2, 3, \text{ mit } |B| = \text{const.}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte E und Eigenfunktionen ψ von

$$H\psi = E\psi.$$

b) Welchen Einfluss hat eine Umeichung des Vektorpotentials auf Eigenwerte und Eigenfunktionen?

Aufgabe 4*Harmonische Wechselwirkung*

Hamilton-Operator zweier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem harmonischen Oszillatorpotential, die über harmonische Oszillatorkräfte miteinander wechselwirken, ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + |x_1|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + |x_2|^2 \right) + \frac{\kappa}{2} |x_1 - x_2|^2.$$

Dabei seien die Teilchen jeweils am Ort $x_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, und die Konstanten \hbar , m und ω wurden gleich 1 gesetzt. Berechnen Sie die Grundzustandsfunktion und -energie.

Aufgabe 5*Hartree-Näherung*

Hierbei wird der Effekt der Coulomb-Abstoßung der Elektronen auf folgende Weise simuliert: Ein Elektron i ist der Wechselwirkung, welche durch das elektrische Potential

$$V_H(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x') - \rho_i(x')}{|x - x'|} d^3x'$$

beschrieben wird, ausgesetzt. Dabei gibt ρ die Ladungsdichte aller Elektronen und ρ_i die Ladungsdichte des Elektrons i an. Wir setzen nun den Hamilton-Operator eines Kerns mit Kernladung Z und zwei Elektronen, bei Vernachlässigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung, voraus.

- Approximieren Sie die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x_1, x_2)$ durch die Grundzustandswellenfunktion des Systems ohne Wechselwirkung zwischen den Elektronen. Wie berechnet sich die Ladungsdichte $\rho(x)$ aus der Wellenfunktion der Elektronen?
- Wird der Einfluss der Kernladung berücksichtigt, so bewegt sich das Elektron unter dem Einfluss des Gesamtpotentials

$$V_{eff}(x) = -\frac{Ze}{|x|} + V_H(x) =: -\frac{Z_{eff}(x)e}{|x|}.$$

Diskutieren Sie die Größen Z_{eff} und V_{eff} .

Aufgabe 6*Kleinsches Paradoxon*

Ein relativistisches Teilchen der Masse m , mit Impuls p und Energie E_p , bewege sich auf ein Stufenpotential der Barrierenhöhe V_0 zu. Lösen Sie dieses Streuproblem im Rahmen der Klein-Gordon-Theorie.

- a) Bestimmen Sie geeignete Streulösungen $\psi(x)$ für die Gebiete außerhalb und innerhalb des Potentialbereiches und nutzen Sie die Forderung, dass $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.
- b) Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus den Stromdichten für $|E_p - V_0| > mc^2$.
- c) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(x)$ und Gruppengeschwindigkeit für den Bereich mit $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und diskutieren Sie folgende Fälle
 - (i) $E_p > V_0 + mc^2$
 - (ii) $E_p - mc^2 < V_0 < E_p + mc^2$
 - (iii) $V_0 > E_p + mc^2$.

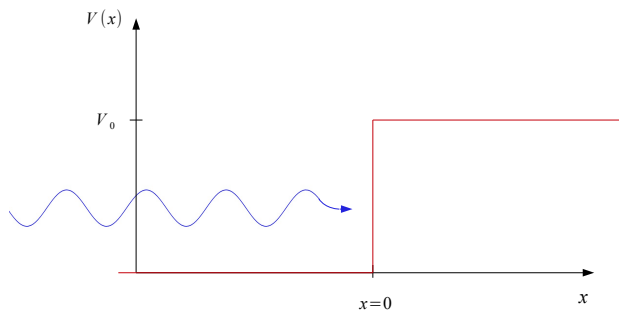


Abbildung 4.6 Potentialwall

Aufgabe 7*Pionische Atome*

Systeme, die aus einer positiven Kernladung Ze und einem π^- -Meson bestehen, werden pionische Atome genannt.

- a) Bestimmen Sie für ein solches Atom, mit

$$V(x) = e\phi(x) = -\frac{Ze^2}{r},$$

das Punktspektrum σ_p . Es gelte

$$Z\alpha < l + \frac{1}{2},$$

wobei l die Drehimpulsquantenzahl und

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

die Feinstrukturkonstante.

- b) Entwickeln Sie, für $Z\alpha \ll 1$, die Eigenwertgleichung bis zur 4. Ordnung in $Z\alpha$.
- c) Was geschieht für $Z\alpha > l + \frac{1}{2}$?

Namen- und Sachregister

Dirac-Gleichung	128
Hölder-Raum	5
Klein-Gordon-Gleichung	132
Maxwell-Gleichungen	104
Operator	
- adjungiert	40
- dual	40
Resolventenmenge	38
Sobolev-Raum	13
Spektrum	38
- kontinuierliches Spektrum	38
- Punktspektrum	38
- Residualspektrum	38

Symbolverzeichnis

$C^s(\bar{\Omega})$	5
\mathbb{K}	\mathbb{R} oder \mathbb{C}
$K(X, Y)$	36
$L(X, Y)$	36
$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	
$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$	
$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	
$\rho(T)$	38
$\sigma(T)$	38
$\sigma_p(T)$	38
$\sigma_c(T)$	38
$\sigma_r(T)$	38
$W^{k,p}(\Omega)$	13

Literatur

- [1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, D. van Nostrand, Princeton, Toronto, New York, London (1965)
- [2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. *Commun. Pure Appl. Math.* 12, 623-727, 1959.
- [3] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Commun. Pure Appl. Math.* 17, 35-92, 1964.
- [4] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1985)
- [5] J. D. Bjorken, S. D. Drell. *Relativistische Quantenmechanik*, B.-I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich (1987)
- [6] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Nauka (1981)
- [7] A. Budó, *Theoretische Mechanik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1987)
- [8] A. P. Calderón, A. Zygmund, On singular integrals. *Am. J. Math.* 78, 289-309, 1956.
- [9] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications, New York (1981)
- [10] F. Constantinescu, *Distributionen und ihre Anwendung in der Physik*, B. G. Teubner, Stuttgart (1974)
- [11] A. S. Dawydow, *Quantenmechanik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1987).
- [12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition, AMS (2015)
- [13] O. Forster, *Analysis 3*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1983)
- [14] D. Fujiwara, H. Morimoto, An L_r -theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA*, 24:685-700, 1977.
- [15] C. Gerthsen, H. O. Kneser, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1982)
- [16] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983)

- [17] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner, 1981
- [18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals I, *Math. Z.* 27, 565-606, 1928.
- [19] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge University Press (1973).
- [20] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart (1989)
- [21] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1965)
- [22] F. Hirzebruch, W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, B.-I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich (1985)
- [23] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1990)
- [24] H. Holmann, H. Rummler, *Alternierende Differentialformen*, B.-I.-Wissenschaftsverlag, Zürich (1981).
- [25] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1975)
- [26] K. Jörgens, *Lineare Integraloperatoren*, Teubner, Stuttgart (1970).
- [27] J. Jost, *Partial differential equations*, Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London (2013).
- [28] K. Kodaira, Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory). *Ann. Math., II. Ser.* 50, 587-665, 1949.
- [29] R. Kress, Grundzüge einer Theorie der verallgemeinerten harmonischen Vektorfelder, *Methoden Verfahren Math. Phys.* 2, 49-83, 1969
- [30] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function spaces*, Academia, Prag (1967).
- [31] A. Kufner, H. Leinfelder, Eagle-Starthilfe, Elementare Ungleichungen, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig (2012)
- [32] A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. *The Hardy Inequality. About its history and some related results*. Pilsen (2007).
- [33] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York, London, Paris (1969)
- [34] O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York (1985)

- [35] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik III, Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin (1985)
- [36] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik IV, Quantenelektrodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin (1989)
- [37] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik VI, Hydrodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin (1991)
- [38] L. D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik VIII, Elektrodynamik der Kontinua*, Akademie-Verlag, Berlin (1985)
- [39] A. Lunardi, E. Sinestrari, W. von Wahl, A semigroup approach to the time dependent parabolic initial-boundary value problem, *Nota Scientifica*, Rom, 1989
- [40] N. G. Meyers, J. Serrin, $H = W$, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 51:1055-1056, 1964
- [41] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1966)
- [42] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, Academia, Prag (1967).
- [43] G. de Rham, *Differentiable Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1984)
- [44] B.-W. Schulze, G. Wildenhain, *Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*. Birkhäuser, Basel, Stuttgart (1977).
- [45] K. Simonyi, *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [46] H. Sohr, *The Navier-Stokes equations – An elementary functional analytic approach*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin (2001).
- [47] A. Sommerfeld, *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. (1978)
- [48] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1990)
- [49] R. Temam, *Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence (2001)
- [50] H. Triebel, *Höhere Analysis*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. (1980)
- [51] H. Triebel, *Theory of Function Spaces I*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart (1983)

- [52] W. von Wahl, *Vorlesung über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes*. Vorlesungsreihe des SFB 256: Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 11, Bonn (1989).
- [53] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, B.G. Teubner, Stuttgart (1976)
- [54] J. Wloka, *Partielle Differentialgleichungen*, B.G. Teubner, Stuttgart (1982)
- [55] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980)