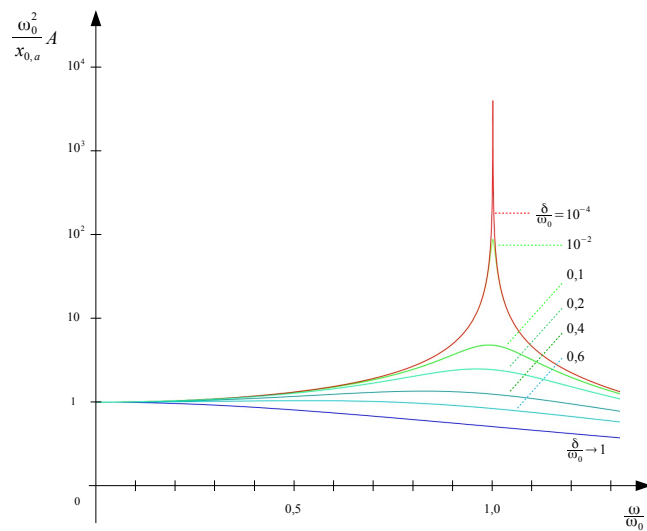


Physik II

für den Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik (B-EI)

Dr. Jürgen Bolik

Technische Hochschule Nürnberg



Inhaltsverzeichnis

1	Schwingungen	4
1.1	Freie ungedämpfte Schwingung	4
1.2	Freie gedämpfte Schwingung	22
1.3	Erzwungene gedämpfte Schwingungen	28
1.4	Überlagerung von Schwingungen	35
1.4.1	Superposition harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz	35
1.4.2	Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen	36
1.4.3	Superposition harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und verschiedener Frequenzen	37
1.4.4	Superposition zueinander orthogonaler harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz	39
1.4.5	Superposition zueinander orthogonaler harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzen	41
1.5	Übungsaufgaben	43
1.6	Überblick zu Schwingungen	54
2	Wellen	58
2.1	Definitionen und Begriffe	58
2.2	Lösungen der Wellengleichung	60
2.2.1	Die Phasengeschwindigkeit c	60
2.2.2	Ebene Wellen	61
2.2.3	Kugelwellen	64
2.2.4	Kreiswellen	66
2.3	Schallwellen	67
2.3.1	Die Wellengleichung und die Schallgeschwindigkeit in Gasen	67
2.3.2	Schallschnelle und Druckamplitude	70
2.3.3	Energiedichte und Intensität	71
2.4	Interferenz harmonischer Wellen	74
2.4.1	Interferenz harmonischer Wellen gleicher Frequenz	74
2.4.2	Interferenz harmonischer Wellen verschiedener Frequenz	79
2.4.3	Stehende Wellen	81
2.5	Wellenausbreitung nach Huygens und Fresnel	90
2.5.1	Elementarwellen	90
2.5.2	Beugung und Interferenz	91
2.5.3	Reflexion und Brechung	97
2.5.4	Akustischer Doppler-Effekt	101
2.5.5	Optischer Doppler-Effekt	106
2.6	Übungsaufgaben	112
2.7	Überblick zu Wellen	123

3	Elektromagnetische Wellen	129
3.1	Das Spektrum elektromagnetischer Wellen	129
3.2	Die Maxwell-Gleichungen	130
3.3	Elektromagnetische Wellen	131
3.4	Energiedichte und Energiestrom	135
3.5	Der lineare Oszillator	136
3.6	Wechselwirkung elektromagnetischer Wellen mit Materie	140
3.6.1	Die Quantenzahlen von Elektronen der Atomhülle	140
3.6.2	Das Photon	141
3.6.3	Die Hohlraumstrahlung und das Plancksche Strahlungsgesetz	142
3.7	Übungsaufgaben	146
4	Elektrische Leitfähigkeit von Festkörpern	148
4.1	Elektrische Leitfähigkeit von Metallen	148
4.1.1	Elektrische Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit	148
4.1.2	Die Drude-Lorentz-Theorie	149
4.2	Energiebänder	149
4.3	Halbleiter	151
4.3.1	Eigenleitung	151
4.3.2	Störstellenleitung	151

1 Schwingungen

1.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Die harmonische Schwingung

Unter einer linearen *harmonischen Schwingung* verstehen wir Bewegungen, deren Elongation (Auslenkung) eine Sinus- oder Cosinusfunktion der Zeit ist. Bezeichnen wir die Auslenkung mit s und ihren Maximalwert, die Amplitude, mit A , so gilt für diese Bewegung

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

oder

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \beta).$$

Dabei sind ω , α und β Konstanten.

Für die *Frequenz* ν einer Schwingung gilt

$$\nu = \frac{n}{t}$$

Dabei bezeichnet n die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit t .

Daher besteht zwischen der *Umlaufzeit* und der *Frequenz* der folgende Zusammenhang:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Die SI-Einheit der Frequenz ist: $s^{-1} = Hz$ (Hertz).

Ist die *Winkelgeschwindigkeit* ω konstant, so können wir schreiben:

$$\omega := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Dabei ist der Winkel in Bogenmaß angegeben.

Dann erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Das elastische Pendel (Federpendel)

Eine punktförmige Masse m ist an einer masselosen Feder befestigt.

Die mögliche Bewegung der Feder ist eindimensional.

Wird der Massepunkt aus der Gleichgewichtslage um eine kleine Strecke s ausgelenkt, so wirkt auf ihn die rücktreibende Kraft F (Rückstellkraft) nach dem *Hookeschen Gesetz*:

$$F = -D \cdot s.$$

Dabei ist D die Federkonstante.

Nach der Bewegungsgleichung ist die Beschleunigung des Massepunktes

$$a = -\frac{D}{m} \cdot s = -\omega^2 \cdot s$$

eine lineare Funktion von s .

Die Konstante ω heißt *Winkelgeschwindigkeit* und ist für das elastische Pendel gegeben durch

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Für die Schwingungsdauer T erhalten wir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Die Schwingungen des elastischen Pendels sind harmonisch, wenn die Rückstellkraft dem *Hookeschen Gesetz* gehorcht.

Wir betrachten nun die Projektion unserer harmonischen Schwingung:

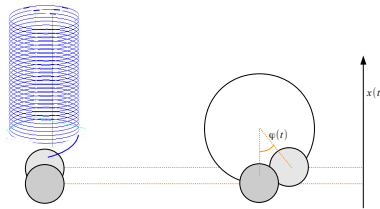


Abbildung 1.1 Auslenkung eines elastischen Pendels und Projektion einer Kreisbewegung

Dabei zeigt sich, dass sich beispielsweise die jeweilige Lösung $s = s(t)$ der Bewegungsgleichung für das Faden- und das Federpendel durch Sinus- und Cosinus-Funktionen beschreiben lässt.

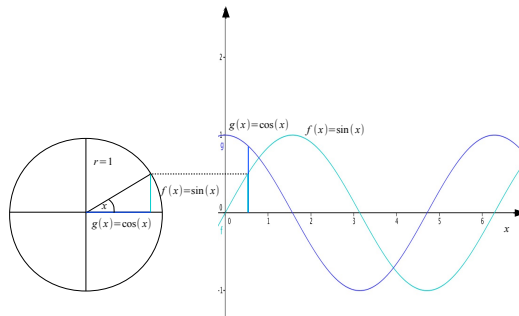


Abbildung 1.2 Einheitskreis und Winkelfunktionen

Das mathematische Pendel (Fadenpendel)

Hier betrachten wir einen

- an einem masselosen, nicht-dehnbaren Faden befestigten und
- unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingenden
- nahezu punktförmigen Körper der Masse m .

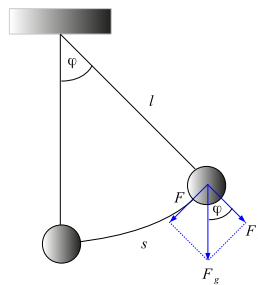


Abbildung 1.3 Das mathematische Pendel

Die Auslenkung wird durch den Winkel φ ausgedrückt. Die Gewichtskraft F_g lässt sich zerlegen in die rücktreibende Kraft (Rückstellkraft) F und die Kraft in Richtung des Fadens F_n . Da

$$\sin \varphi = \frac{F}{F_g}$$

erhalten wir für die rücktreibende Kraft

$$F = F_g \cdot \sin \varphi.$$

Unter s verstehen wir die Länge der Auslenkung aus der Ruhelage. Wir erhalten diese mittels

$$\frac{s}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{\varphi}{360^\circ},$$

wobei r gleich der Fadenlänge l ist.

Für den Winkel φ in *Bogenmaß* erhalten wir

$$\varphi = \frac{s}{r}.$$

Die Kraft F und die zugehörige Beschleunigung sind also bei der Pendelbewegung nicht konstant, sondern Funktionen von s .

Für kleine Auslenkungswinkel φ gilt näherungsweise

$$\sin \varphi \approx \varphi .$$

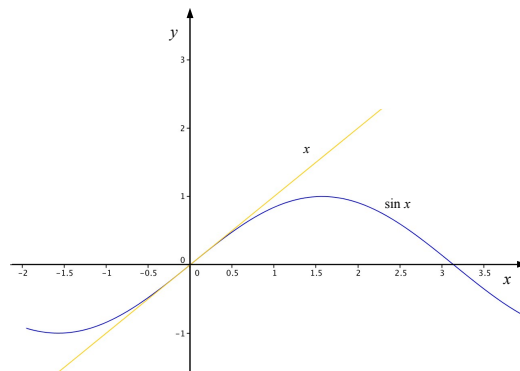


Abbildung 1.4 Lineare Interpolation des Sinus

Beschränken wir uns auf kleine Auslenkungen und wählen das übliche Koordinatensystem mit der Gleichgewichtslage als Ursprung, so können wir daher

$$F = -m \cdot g \cdot \frac{s}{l}$$

schreiben.

Nach dieser Gleichung gilt

$$F \sim s .$$

Schwingungen, die diesem Kraftgesetz gehorchen, sind

harmonische Schwingungen (harmonische Oszillationen).

Die Schwingungen des mathematischen Pendels sind harmonisch, wenn die Ausschläge relativ zur Fadenlänge klein sind.

Betrachten wir die Rückstellkraft des mathematischen Pendels

$$F = -m \cdot g \cdot \frac{s}{l} ,$$

so können wir mit Hilfe der Bewegungsgleichung folgern, dass

$$a = -\omega^2 \cdot s$$

gilt, wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ist. Demnach gilt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Anmerkung (Gesetz der Isochronie von Galilei)

Bei kleinen Ausschlägen ist

- die Schwingungsdauer von der Masse des Körpers und der Amplitude unabhängig und
- die Schwingungsdauer bei gleicher Pendellänge am gleichen Ort identisch.

Mit Hilfe der Bewegungsgleichung

$$-mg \sin \varphi = ma$$

und

$$\varphi = \frac{s}{l}$$

erhalten wir für kleine Auslenkungen

$$\varphi''(t) + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Auf die Lösungen solcher Differentialgleichungen werden wir im folgenden Abschnitt noch eingehen.

Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

Harmonische Schwingungen genügen der Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Die allgemeine Lösung unserer Bewegungsgleichung hat folgende Form:

$$x(t) = c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t).$$

Eine andere Darstellung der allgemeinen Lösung lautet

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Der Zusammenhang beider Darstellungen wird durch folgende Beziehungen hergestellt:

$$c_1 = A \cdot \cos \alpha, \quad c_2 = A \cdot \sin \alpha,$$

da

$$x(t) = A \cdot \cos \alpha \sin(\omega t) + A \cdot \sin \alpha \cos(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Die allgemeine Lösung der harmonischen Differentialgleichung,

$$x(t) = c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t),$$

besitzt die Eigenschaft

$$x(t=0) = c_2 \quad \text{und} \quad x'(t=0) = c_1 \cdot \omega.$$

Andererseits ist die Lösung unserer Differentialgleichung durch die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $x'(t_0) = v_0$ *eindeutig* bestimmt.

Nehmen wir beispielsweise an, dass die Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = 0 \quad \text{und} \quad x'(t=0) = A \cdot \omega$$

gelten, so erhalten wir

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t),$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

und

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t).$$

Zeitlicher Verlauf der Auslenkung x , der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a

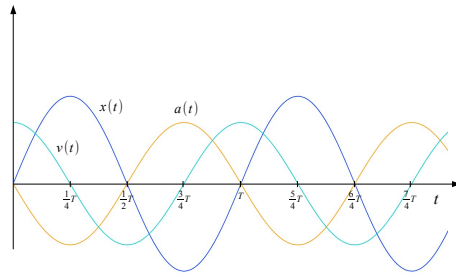


Abbildung 1.5 Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Andere übliche Bedingungen an die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sind beispielsweise durch die Anfangsbedingungen

$$x(t = 0) = A$$

und

$$x'(t = 0) = 0$$

gegeben. In diesem Fall erhalten wir

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t).$$

Amplitude und Nullphasenwinkel

In der Ortsfunktion $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ bezeichnet

- A die *Amplitude*, d.h. die maximale Auslenkung aus der Ruhelage, und
- φ_0 den Nullphasenwinkel.

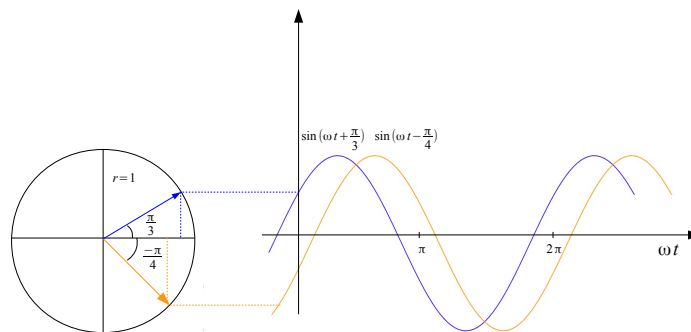


Abbildung 1.6 Phasenverschiebung

Beispiele für harmonische Oszillatoren

Die harmonische Schwingungsgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

beschreibt beispielsweise

- *Fadenpendel* bei kleinen Ausschlägen, wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

- *Federpendel* bei Hookescher Kraftwirkung, wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}},$$

- den *elektrischen Schwingkreis*, wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Der elektrische Schwingkreis

Für die Ladung Q des *elektrischen Schwingkreises* erhalten wir

$$U = \frac{Q(t)}{C} + LQ''(t) = 0,$$

wenn keine äußere Spannung anliegt und $R = 0$ ist.

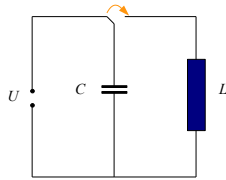


Abbildung 1.7 Schwingkreis ohne Ohmschen Widerstand

Weitere Beispiele für harmonische Oszillatoren

Harmonische Schwingungen treten beispielsweise bei mathematischen Pendeln, bei elastischen Pendeln und dem elektrischen Schwingkreis auf.

Weitere Beispiele für harmonische Schwingungen erkennen wir in den Bewegungen

- des physikalischen Pendels,
- des Torsionspendels und
- des Flüssigkeitspendels.

Das physikalische Pendel

Das physikalische Pendel ist ein sich unter dem Einfluss der Schwerkraft drehender starrer Körper, wobei

$$\theta \varphi''(t) = -mgR \cdot \sin \varphi(t) .$$

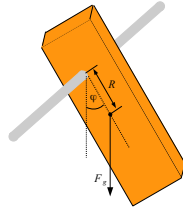


Abbildung 1.8 Das physikalische Pendel

Die Bewegung genügt der Gleichung

$$\theta \varphi''(t) = M_x ,$$

wobei θ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse x ist.

Für das Drehmoment \vec{M} gilt

$$\vec{M} = M_x \cdot \vec{e}_x \text{ mit } M_x = -mgR \cdot \sin \varphi .$$

Wir betrachten wieder kleine Auslenkungen. Dann ergibt sich für ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} .$$

Das physikalische Pendel bewegt sich daher wie ein mathematisches Pendel der Länge

$$l = \frac{\theta}{mR} .$$

Das Torsionspendel

Hierbei gehen wir, ähnlich, wie bei dem elastischen Pendel, von einer linearen Bewegungsgleichung aus:

$$\theta \varphi''(t) = -D\varphi(t)$$

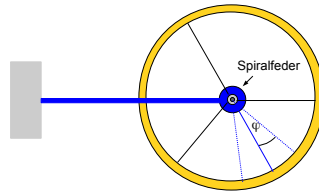


Abbildung 1.9 Das Torsionspendel

Hier wirkt ein rücktreibendes Drehmoment M_z , das innerhalb gewissen Grenzen linear vom Auslenkungswinkel abhängt:

$$M_z = -D\varphi.$$

Dabei ist die positive Konstante D das *Richtmoment* (Direktionsmoment).

θ ist das Trägheitsmoment des Körpers um die Drehachse.

Für ω erhalten wir

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\theta}}.$$

Das Flüssigkeitspendel

Das *Flüssigkeitspendel* ist eine in einem U-Rohr schwingende Flüssigkeitsäule, wobei

$$s''(t) + \frac{2g}{l}s(t) = 0.$$

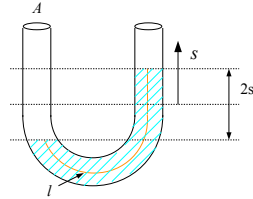


Abbildung 1.10 Das Flüssigkeitspendel

Der Flüssigkeitsstand der beiden kommunizierenden Röhren unterscheidet sich. Die entsprechende Differenz des Gewichts beträgt

$$\rho A \cdot 2s \cdot g.$$

Daher gilt die Bewegungsgleichung

$$m_{ges}s''(t) = -2A\rho g s(t)$$

und

$$s''(t) = -\frac{2g}{l}s(t).$$

Für ω erhalten wir

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Anwendung des Energieerhaltungssatzes der Mechanik

Die *Bewegungsenergie* oder *kinetische Energie* eines Massepunktes mit der Masse m und der Geschwindigkeit v ist definiert als

$$E_{kin} := \frac{1}{2}mv^2.$$

Diese Größe, allerdings noch ohne den Faktor $1/2$, wurde von Leibniz im Jahre 1686 eingeführt.

Mittels

$$m \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)$$

erhalten wir

$$m \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v}) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Damit folgt für die entlang des Weges von Punkt 1 zu Punkt 2 verrichtete Arbeit W

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{kin,2} - E_{kin,1}.$$

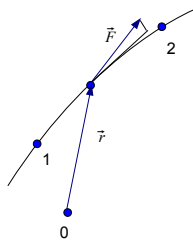


Abbildung 1.11 Kraft und Weg

Der Energiesatz der Mechanik besagt, dass die Summe der kinetischen und potentiellen Energie, d.h.

$$E_{ges} := E_{kin} + E_{pot},$$

in einem *konservativen Kraftfeld* konstant ist.

Ein Kraftfeld \vec{F} heißt *konservativ*, wenn \vec{F} nur von den Ortskoordinaten abhängt und zu $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ eine Funktion $V = V(x, y, z)$ existiert, so dass

$$\vec{F} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

gilt.

Anmerkung: Selbstverständlich können wir in dieser Definition V durch $V \cdot m$ ersetzen, wobei m eine Konstante und beispielsweise die Masse ist.

Ersetzen wir V durch E_{pot} , so erhalten wir

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \text{grad } E_{pot} \cdot d\vec{r} = E_{pot,1} - E_{pot,2}.$$

In einem *konservativen Kraftfeld*

- verschwindet die längs eines beliebigen geschlossenen Weges verrichtete Arbeit,
- hängt die verrichtete Arbeit W nur von der Lage des Anfangs- und Endpunktes ab.

Der Energiesatz für das elastische Pendel

Im Falle des Federpendels gilt das lineare Kraftgesetz

$$F = -D x$$

und wir erhalten für die potentielle Energie (Spannenergie oder elastische Energie):

$$E_{pot} = - \int F dx + C = - \int (-D x) dx + C = \frac{1}{2} D x^2 + C.$$

O.B.d.A. können wir hier $C = 0$ setzen.

Da sich die Auslenkung x darstellen lässt als

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha),$$

lässt sich die potentielle Energie folgendermaßen schreiben:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t + \alpha).$$

Für die kinetische Energie ergibt sich

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Da für Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

gilt, erhalten wir für die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} D A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{1}{2} D A^2. \end{aligned}$$

Wie sich gezeigt hat, oszillieren die Werte der kinetischen und potentiellen Energie:

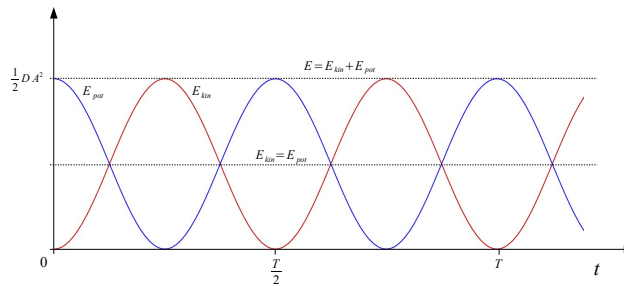


Abbildung 1.12 Energieformen

Unter der Voraussetzung, dass

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$$

gilt, können wir mit Hilfe der Energiebilanz zeigen, dass $x(t)$ der harmonischen Differentialgleichung genügt.

Dabei lässt sich zunächst feststellen, dass

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} D x^2(t) + \frac{1}{2} m v^2(t) \right) = 0.$$

Somit gilt

$$D x(t) x'(t) + m x'(t) x''(t) = 0.$$

Für den Bereich, in dem $x'(t) \neq 0$ ist, ergibt sich daher

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Der Energiesatzes für das mathematische Pendel

Für das Fadenpendel gilt der Energiesatz

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{const.} = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

wobei $v_0 = v(z = 0)$.

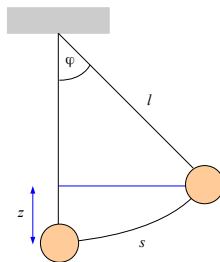


Abbildung 1.13 Das mathematische Pendel

Mit $v = l\varphi'(t)$ und $z = l(1 - \cos \varphi)$, können wir diese Gleichung umformulieren zu

$$(\varphi'(t))^2 = \gamma_0^2 - \frac{2g}{l}(1 - \cos \varphi),$$

wobei $\gamma_0 := \frac{v_0}{l}$.

Hieraus kann, für beliebige Pendelausschläge, ein funktionaler Zusammenhang zwischen t und φ hergeleitet werden.

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine homogene (gewöhnliche) lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$P(D)y = 0.$$

Dabei steht $D = \frac{d}{dx}$ für die Ableitung und $P(D)$ für folgenden Differentialoperator

$$P(D) = a_0 + a_1D + \dots + a_nD^n.$$

Wir ordnen der Differentialgleichung

$$P(D)y = 0$$

das *charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) := a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$$

zu.

Hat das charakteristische Polynom n paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, so bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_k(x) := e^{\lambda_k x}, k = 1, \dots, n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0.$$

Für die Differentialgleichung des *harmonischen Oszillators*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \text{ mit } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

erhalten wir

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind daher

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Somit bilden die Funktionen

$$\varphi_1(t) := e^{i\omega t} \text{ und } \varphi_2(t) := e^{-i\omega t}$$

ein Lösungsfundamentalsystem.

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

und der Linearkombinationen

$$\psi_1(t) := \frac{1}{2}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = \cos(\omega t)$$

$$\psi_2(t) := \frac{1}{2i}(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = \sin(\omega t)$$

erhalten wir das reelle Fundamentalsystem $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$ und somit als allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Im folgenden Abschnitt betrachten wir freie *gedämpfte* Schwingungen als Lösungen der Gleichung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Hierbei ist $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, d. h. eine positive reelle Zahl, und $\delta \in \mathbb{R}_+$, d. h. eine nicht-negative reelle Zahl.

Freie *ungedämpfte* harmonische Schwingungen $x(t)$ hingegen genügen der Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Neben solchen ungedämpften Schwingungen behandeln wir nun Schwingungen, deren Amplitude, infolge des Verlustes mechanischer Energie, streng monoton abnimmt.

Schwingungen können beispielsweise durch Reibungskräfte F_r gedämpft werden. Nehmen wir an, dass

$$F_r = -b v,$$

mit einer positiven Konstanten b , so erhalten wir mit der Bewegungsgleichung

$$m x''(t) + b x'(t) + D x(t) = 0$$

ein erstes Beispiel zu oben genannter Differentialgleichung.

Beispiele für Reibungskräfte

- a) *Coulomb-Reibung* entsteht beispielsweise, wenn zwei Festkörper direkten Kontakt haben und dabei aneinander haften oder sich relativ zueinander bewegen.

- Diese Reibungskraft ist annähernd unabhängig von der Geschwindigkeit.
- Ist F_n die Normalkraft, d.h. die Kraft senkrecht zur Unterlage, so gilt für die Reibungskraft F_r :

$$F_r = \mu F_n.$$

Dabei ist μ der *Reibungskoeffizient*.

- Wir unterscheiden Haft-, Gleit- und Rollreibung.

- b) *Stokes-Reibung* entsteht, wenn sich relativ kleine Körper langsam durch ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) bewegen. Für eine Kugel mit Radius r erhalten wir

$$F_r = 6\pi\eta r v,$$

wobei η die Viskosität des Fluids bezeichnet.

- c) *Newton-Reibung* kann entstehen, wenn diese Körper größer und schneller sind. Hier wird die Reibungskraft berechnet durch

$$F_r = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 .$$

Dabei ist A der Querschnitt des Körpers in Bezug auf die Bewegungsrichtung, ρ die Dichte des Fluids und c_w ein Widerstandskoeffizient, der von der Form des Körpers abhängt.

Falls Lösungen $\omega \in \mathbb{R}$ von $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ existieren, ist

$$x(t) = e^{-\delta t} x_0 \cos(\omega t)$$

eine Lösung unserer Differentialgleichung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 ,$$

ohne Vorgabe der Anfangswerte, da

$$\begin{aligned} (e^{-\delta t} \cos(\omega t))'' &= (-\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t) - e^{-\delta t} \omega \sin(\omega t))' \\ &= \delta^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t) + 2\delta e^{-\delta t} \omega \sin(\omega t) - e^{-\delta t} \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= 2\delta^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t) + 2\delta e^{-\delta t} \omega \sin(\omega t) - e^{-\delta t} \omega_0^2 \cos(\omega t) \\ &= -2\delta(e^{-\delta t} \cos(\omega t))' - e^{-\delta t} \omega_0^2 \cos(\omega t) . \end{aligned}$$

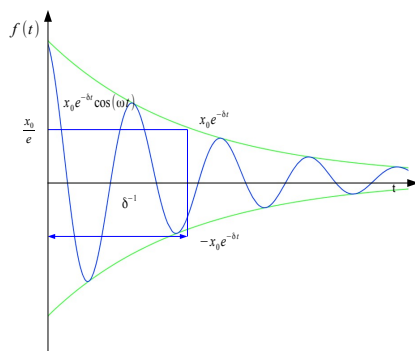


Abbildung 1.14 Gedämpfte Schwingung

Dabei sind die Konstanten δ und ω für das quasi-elastische Pendel gegeben durch

$$\delta := \frac{b}{2m}, \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}} .$$

Für die Amplitude $A(t) := e^{-\delta t} x_0$ gilt

- $A(t = 0) = x_0$
- $A(t = T) = e^{-\delta T} x_0$, wobei für das *logarithmische Dekrement* der Schwingung, δT , gilt

$$\delta T = \delta \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{\omega_0}{\delta})^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4D^2 m}{b^2} - 1}} = \frac{2\pi b}{\sqrt{4D^2 m - b^2}}.$$

Die mechanische Gesamtenergie ist bei maximalen Ausschlägen rein potentiell, d. h. näherungsweise

$$W = \frac{1}{2} D \cdot (x_0 e^{-\delta t})^2 = \frac{1}{2} D x_0^2 e^{-2\delta t},$$

falls $\delta \ll \omega_0$. Die Leistung des Oszillators, d. h. der Energieverlust pro Zeiteinheit beträgt dann

$$W'(t) = -2\delta W(t).$$

Wir betrachten nun die allgemeine Lösung unserer Gleichung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

und Lösungen unter bestimmten Anfangsbedingungen.

Schwingungen unter der Bedingung $0 \leq \delta < \omega_0$

Mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und den Ableitungen $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ und $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ erhalten wir

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die komplexen Zahlen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega,$$

$$\text{wobei } \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + c_2 e^{(-\delta - i\omega)t}$$

lässt sich umformen zu

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}).$$

Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

erhalten wir

$$x(t) = e^{-\delta t} (d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)) .$$

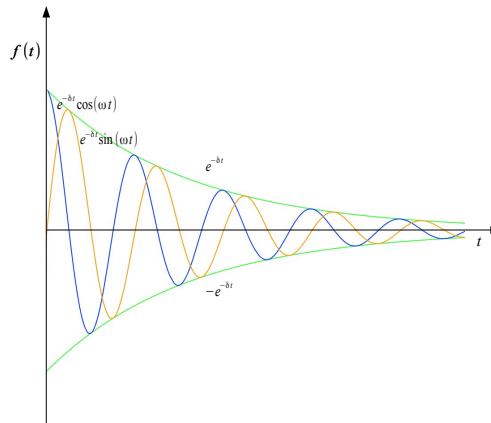


Abbildung 1.15 Gedämpfte Schwingungen

Mit den Anfangsbedingungen

$$x(t = 0) = x_0$$

und

$$x'(t = 0) = 0$$

erhalten wir

$$x_0 = x(t = 0) = e^{-\delta \cdot 0} (d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega \cdot 0))$$

und

$$0 = x'(t = 0) = -\delta e^{-\delta \cdot 0} (d_1 \cos(\omega \cdot 0) + d_2 \sin(\omega \cdot 0)) \\ + e^{-\delta \cdot 0} (-d_1 \omega \sin(\omega \cdot 0) + d_2 \omega \cos(\omega \cdot 0)) .$$

Die erste dieser beiden Gleichungen impliziert

$$d_1 = x_0$$

und die zweite

$$d_2 = \frac{\delta}{\omega} \cdot x_0 .$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t) \right).$$

Der aperiodische Grenzfall (für $\delta = \omega_0$)

Die Lösung von

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ist

$$\lambda_{1,2} = -\delta.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t).$$

Unter der Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$ und $x'(t = 0) = 0$ erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t),$$

wobei $\delta = \omega_0$.

Der aperiodische Fall (Kriechfall) (für $\delta > \omega_0$)

Die Lösungen von

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

sind

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$x(t) = c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t} \quad \text{wobei } \mu_i := -\lambda_i > 0.$$

Unter der Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$ und $x'(t = 0) = 0$ erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung:

$$x(t) = \frac{x_0}{\mu_2 - \mu_1} (\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}).$$

Lösungen $x_\delta(t)$ des Anfangswertproblems

Im vorangegangenen Abschnitt bestimmten wir die Lösungen $x(t) = x_\delta(t)$ der Differentialgleichung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

unter den Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0$$

und

$$x'(t=0) = 0.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Einfluss der Dämpfung auf diese Lösungen $x(t) = x_\delta(t)$:

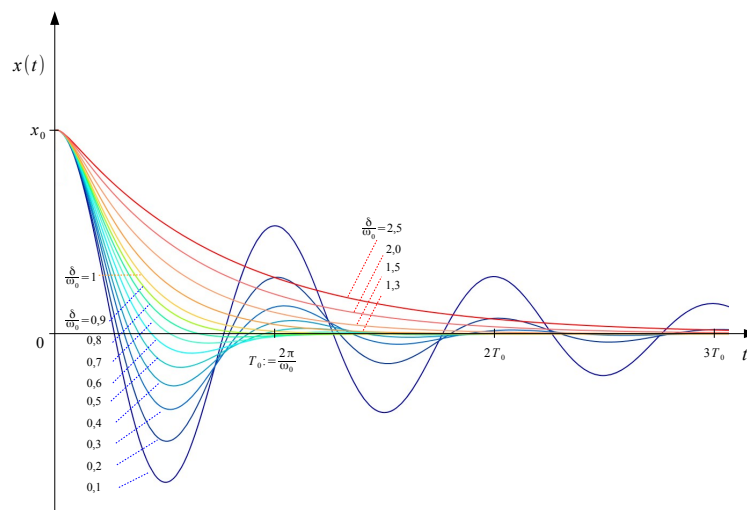


Abbildung 1.16 Der Einfluss der Dämpfung δ

1.3 Erzwungene gedämpfte Schwingungen

Hier betrachten wir ein System, das sinusförmig schwingen kann, beispielsweise ein quasi-elastisches Pendel, dessen Schwingungen durch die Stokes-Reibung gedämpft werden.

Gedämpfte mechanische Schwingungen

Die Auslenkung $x(t)$ genüge der Differentialgleichung

$$Dx(t) + bx'(t) + mx''(t) = F_a(t),$$

wobei

- Trägheitskraft: $mx''(t)$
- Reibungskraft: $-bx'(t)$
- Rückstellkraft: $-Dx(t)$.

Zusätzlich wirke eine periodische äußere Kraft $F_a(t)$, wobei

$$F_a(t) = F_0 \cos(\omega t).$$

Die Kraft $F_a(t)$ ist daher harmonisch veränderlich mit der konstanten Kreisfrequenz ω und der konstanten Anregungsamplitude F_0 .

Zusätzlich gehen wir hier davon aus, dass die Reibungskraft nicht so groß ist, dass keine periodischen Lösungen existieren.

Formal heißt das, dass wir

$$0 < \frac{b}{2m} < \sqrt{\frac{D}{m}}$$

voraussetzen.

Der RLC-Serienschwingkreis

Hier genügt die Ladung $Q(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}Q(t) + RQ'(t) + LQ''(t) = U_a(t),$$

wobei

- Kapazität: C
- Ohmscher Widerstand: R
- Induktivität: L .

Zusätzlich liege eine äußere Spannung $U_a(t)$ an, wobei

$$U_a(t) = U_0 \cos(\omega t).$$

Die Kreisfrequenz ω und Amplitude U_0 sind konstant.

Analog zu unserem mechanischen Modell betrachten wir hier lediglich die periodischen Lösungen $Q(t)$ der Differentialgleichung.

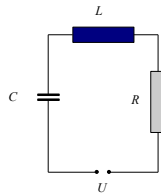


Abbildung 1.17 Serienschwingkreis mit äußerer Spannungsquelle

Wir betrachten nun die Gleichung

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_a(t),$$

wobei $x_a(t) = x_{0,a} \cos(\omega t)$ mit den Konstanten $x_{0,a}$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Zusätzlich gelte $0 < \delta < \omega_0$.

Für die beiden beschriebenen Beispiele,

- eine quasi-elastische mechanische Schwingung und
- die Ladungssoszillation eines RLC-Serienschwingkreises,

setzen wir

$$\begin{aligned} \cdot \quad \omega_0 &:= \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ bzw. } \omega_0 := \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \cdot \quad \delta &:= \frac{b}{2m} \text{ bzw. } \delta := \frac{R}{2L} \\ \cdot \quad \omega_\delta &:= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen Differentialgleichung setzt sich zusammen

- aus der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung und
- einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung.

Dabei gilt

$$y = y_h + y_p.$$

In unserem Fall ist die *inhomogene Gleichung*

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = x_a(t)$$

und die zugehörige *homogene Gleichung*

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Zu den Methoden, eine partikuläre Lösung einer

inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

zu finden, gehören

- die *Variation der Konstanten* und
- die *Laplace-Transformation*.

Um eine partikuläre Lösung unserer inhomogenen Gleichung zu finden, gehen wir einfacher vor. So verallgemeinern wir die Differentialgleichung zu einer Differentialgleichung für komplexe Funktionen und verwenden dann den Realteil dieser Lösung.

Hierzu betrachten wir die Differentialgleichung

$$z''(t) + 2\delta z'(t) + \omega_0^2 z(t) = x_{0,a} e^{i\omega t},$$

wobei δ , ω_0 und $x_{0,a}$ wie bisher definiert sind.

Mit dem Ansatz

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)},$$

erhalten wir

$$A(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2) = x_{0,a} e^{-i\varphi}.$$

Daraus folgt für die reelle Amplitude

$$A = \frac{x_{0,a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

Mit der Amplitude A und der Phasenverschiebung φ ist auch die reelle partikuläre Lösung unserer ursprünglichen Gleichung

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

bestimmt.

Nun betrachten wir die Amplitude A als Funktion von ω und berechnen deren Maximum.

Dabei erweist sich die folgende Definition als nützlich:

$$\omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Für die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\omega) := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$$

gilt

$$\frac{f'(\omega)}{4} = \omega(-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta^2)$$

und demnach

$$f'(\omega) \geq 0 \iff -(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta^2 \geq 0.$$

Das bedeutet, dass $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

- für $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$: streng monoton und unbeschränkt wachsend,
- für $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$: streng monoton fallend in $(0, \omega_R)$ und streng monoton und unbeschränkt wachsend in (ω_R, ∞) ist.

Betrachten wir nun für den zweiten Fall die Amplitude

$$A = \frac{x_{0,a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

so zeigt sich, dass deren Maximalwert bei $\omega = \omega_R$ angenommen wird und, da

$$(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + 4\delta^2\omega_R^2 = (\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2))^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2) = 4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2),$$

dass

$$A_{max} = A(\omega_R) = \frac{x_{0,a}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{x_{0,a}}{2\delta\omega_\delta}$$

beträgt.

Die Frequenz ω_R heisst daher *Resonanzfrequenz*. Betrachten wir statt unseres mechanischen Modells, einen RLC-Serienschwingkreis, so ist ω_R die *Resonanzfrequenz* für die Ladungsmenge Q und damit auch für die Spannung am Kondensator.

Amplitude $A(\omega)$ und Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ der partikulären Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

zeigen einen von der der relativen Dämpfung $\frac{\delta}{\omega_0}$ abhängigen Verlauf.

Die Amplitude $A(\omega)$ ist in folgender Abbildung für verschiedene Werte der relativen Dämpfung dargestellt:

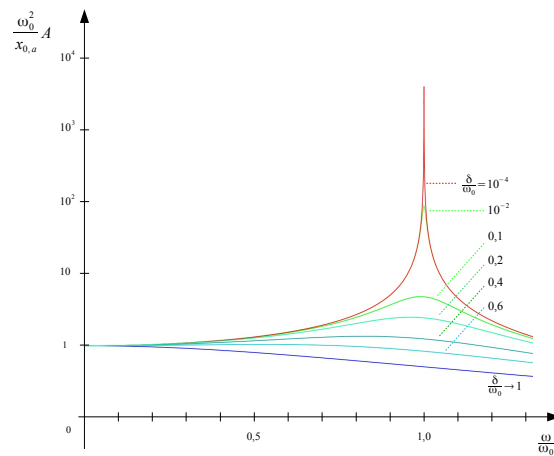


Abbildung 1.18 Amplitude einer erzwungenen Schwingung

Der Gütefaktor Q des Oszillators ist folgendermaßen definiert:

$$Q := 2\pi \frac{W(t)}{|W'(t) \cdot T|}.$$

Wir erhalten näherungsweise

$$Q = \frac{\omega_\delta}{2\delta},$$

falls $\delta \ll \omega_0$.

Folgende Abbildung zeigt die Phasenverschiebung φ , mit

$$\tan \varphi(\omega) = -2\delta \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

für verschiedene Werte der relativen Dämpfung:

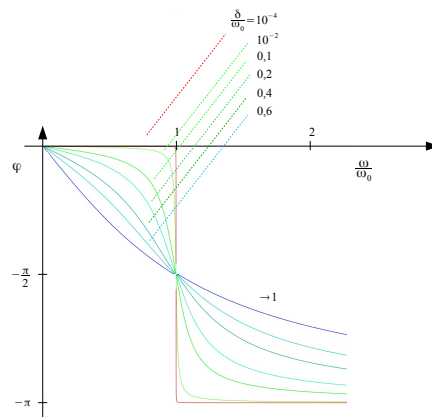


Abbildung 1.19 Phasenverschiebung einer erzwungenen Schwingung

1.4 Überlagerung von Schwingungen

1.4.1 Superposition harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz

Schwingungen $x_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$ gleicher Frequenz lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$x_i(t) = A_i \sin(\omega t + \alpha_i).$$

Für die kollineare *Superposition* zweier solcher Schwingungen x_1 und x_2 gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\alpha) \sin(\omega t) + A \sin(\alpha) \cos(\omega t) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

wobei die Konstanten A und α durch folgende Gleichungen festgelegt sind:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 = A \cos \alpha$$

und

$$A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 = A \sin \alpha.$$

Eine Lösung, mittels A und α , dieses Gleichungssystems existiert und lässt sich einfach bestimmen.

Wir erhalten

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

und

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Damit hat sich gezeigt, dass die Überlagerung zweier *harmonischer Schwingungen*

- gleicher Frequenz und
- gleicher Schwingungsrichtung

eine *harmonische Schwingung* der gleichen Richtung und Frequenz ergibt.

Die Amplitude A hängt von den Amplituden A_1 , A_2 und der *Phasenverschiebung* $\delta := \alpha_2 - \alpha_1$ der Einzelschwingungen ab.

Die Amplitude A der resultierenden Schwingung nimmt den Maximalwert

$$A = A_1 + A_2 \text{ an, wenn } \delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

und den Minimalwert

$$A = |A_1 - A_2|, \text{ wenn } \delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$$

Gilt zusätzlich $A_1 = A_2$, so löschen sich die beiden Schwingungen, in den letztgenannten Fällen, gegenseitig aus.

1.4.2 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen

Wir können unser Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten $A = x_0 \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch als Gleichung für $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine sogenannte *komplexe Amplitude* $z_0 \in \mathbb{C}$ schreiben.

Mit Hilfe der Gleichung

$$A_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) + A_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

und der *Eulerschen Formel*

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

erhalten wir

$$A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2} = A e^{i\alpha} =: z_0.$$

Setzen wir

$$z_{0,1} = A_1 e^{i\alpha_1} \quad \text{und} \quad z_{0,2} = A_2 e^{i\alpha_2},$$

so nimmt die vorangegangene Gleichung die einfache Form

$$z_{0,1} + z_{0,2} = z_0$$

an.

Die Funktion

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \alpha)} = z_0 e^{i\omega t}$$

genügt der Differentialgleichung

$$z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$$

und sowohl deren Real- als auch deren Imaginärteil repräsentieren harmonische Schwingungen.

Die Addition komplexer Zahlen lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene darstellen:

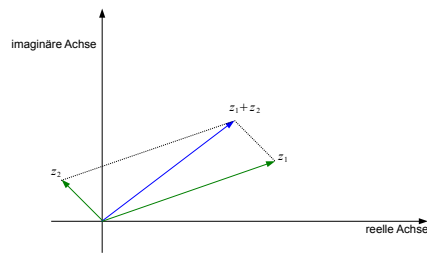


Abbildung 1.20 Addition komplexer Zahlen

1.4.3 Superposition harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und verschiedener Frequenzen

Wir betrachten hier die Überlagerung der Schwingungen

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$$

und

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$

zu

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) .$$

Gilt für die Amplituden $A_1 = A_2 =: A$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t + \delta)) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\delta}{2}\right) . \end{aligned}$$

Der erste cos-Faktor variiert im Vergleich zu dem zweiten nur wenig, falls

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2 .$$

Wir schreiben dann

$$x(t) = A_s(t) \cos(\bar{\omega}t + \frac{\delta}{2}) ,$$

wobei

$$A_s(t) := 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\delta}{2}\right)$$

und

$$\bar{\omega} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

$|A_s(t)|$ variiert periodisch zwischen 0 und $2A$.

Der Vorgang wird als (*reine*) *Schwebung* bezeichnet.

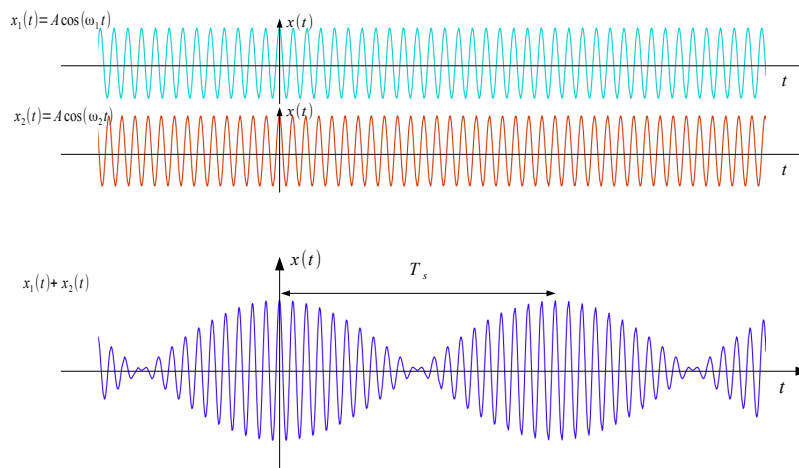


Abbildung 1.21 Schwebung

- Die *Schwebungsdauer* T_s ist definiert als Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplitudenmaxima, d. h.

$$T_s = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|}.$$

- Für die *Kreisfrequenz* ω_s der Schwebung gilt

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = |\omega_1 - \omega_2|.$$

- Für die *Schwebungsfrequenz* ν_s gilt

$$\nu_s = |\nu_1 - \nu_2|.$$

Im allgemeineren Rahmen *harmonisch modulierter Schwingungen*, können wir auch folgende amplitudenmodulierte Schwingung betrachten:

$$x(t) = (A + B \cos(\omega t)) \cos(\omega_0 t), \quad \text{wobei } B \leq A, \omega \ll \omega_0.$$

Das Verhältnis $\frac{B}{A}$ wird Modulationsgrad genannt, $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ die Trägerfrequenz und $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ die Modulationsfrequenz. Mit

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

lässt sich zeigen, dass

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + \frac{B}{2} \cos((\omega_0 + \omega)t) + \frac{B}{2} \cos((\omega_0 - \omega)t).$$

Unsere harmonisch modulierte Schwingung ergibt sich daher auch als Superposition harmonischer Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_0 , $\omega_0 + \omega$ und $\omega_0 - \omega$.

1.4.4 Superposition zueinander orthogonaler harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

Wir betrachten hier die Überlagerung der harmonischen Schwingung

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

in Richtung der Abszisse eines Koordinatensystems und der harmonischen Schwingung

$$y(t) = B \cos(\omega t + \delta)$$

in Richtung der Ordinate.

Zumal hier

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t) \cos \delta - \sin(\omega t) \sin \delta = \frac{x}{A} \cos \delta \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \delta$$

und demnach

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \delta\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \sin^2 \delta$$

gilt, können wir das Bild dieser Schwingung als Lösung der Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

darstellen.

Der entsprechende Graph ist eine Ellipse.

Die zugehörige Schwingung wird als *elliptisch polarisiert* bezeichnet.

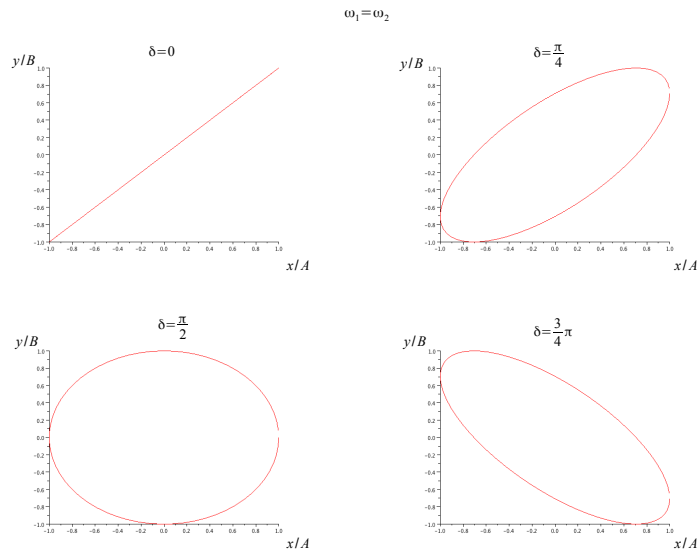


Abbildung 1.22 Einige harmonische Schwingungen in \mathbb{R}^2

- Für die Spezialfälle $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$ ergeben sich, als Lösung der jeweiligen Geradengleichungen, Schwingungen entlang dieser Geraden. Diese Schwingungen werden *linear polarisiert* genannt.
- Ist $A = B$ und $\delta = \frac{\pi}{2}$ oder $\delta = \frac{3\pi}{2}$, dann ist der Graph ein Kreis und die Schwingung heißt *zirkular polarisiert*.

1.4.5 Superposition zueinander orthogonaler harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzen

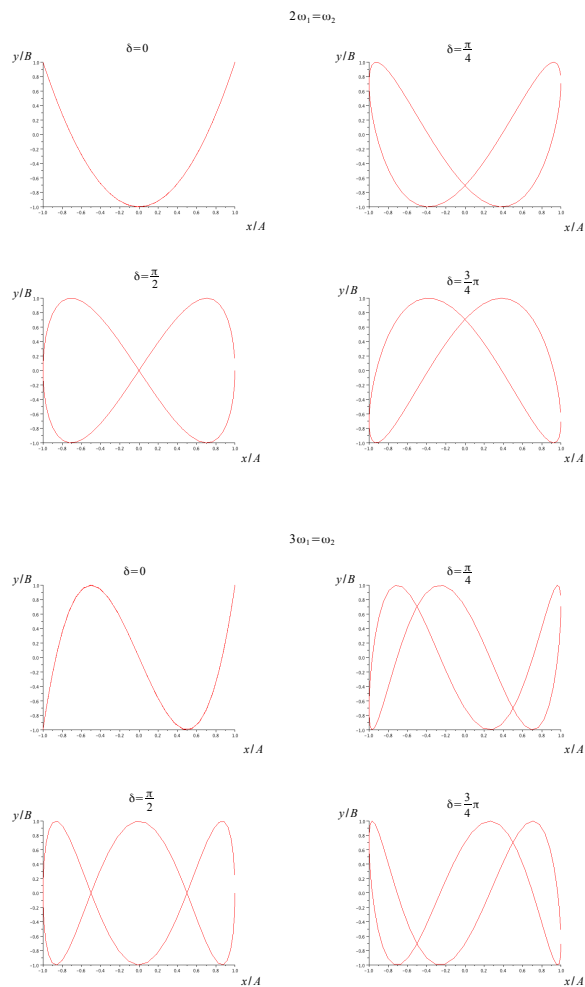
Hier betrachten wir die Überlagerung der harmonischen Schwingungen

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t)$$

und

$$y(t) = B \cos(\omega_2 t + \delta).$$

Die entsprechenden Kurven werden *Lissajous-Figuren* genannt.



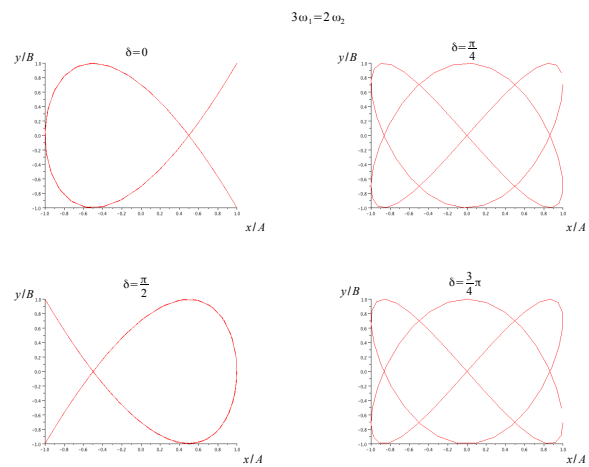


Abbildung 1.23 Einige Lissajous-Figuren

1.5 Übungsaufgaben

Freie ungedämpfte Schwingungen

Aufgabe 1

Ein reibungsfreier Feder-Masse-Schwinger besteht aus einer Masse $m = 6,0\text{ g}$ und einer Feder mit Richtgröße (Federkonstante) $D = 2,4\text{ N/m}$. Die zunächst bei einer Auslenkung von $+3,0\text{ cm}$ aus der Ruhelage festgehaltene Masse erhält bei $t = 0$ einen Kraftstoß (Anfangsimpuls) von $4,2 \cdot 10^{-3}\text{ kg m s}^{-1}$ in Richtung positiver Auslenkung. Der zeitliche Verlauf der Bewegung soll für $t > 0$ durch

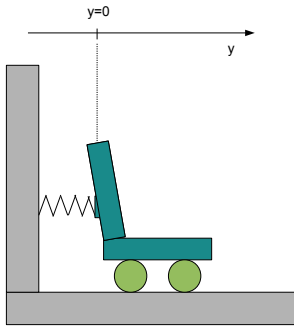
$$y(t) = y_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

beschrieben werden.

- Welche Bedeutung haben die Symbole y_0 , ω und φ_0 ?
- Berechnen Sie ω und die Schwingungsdauer des Feder-Masse-Schwingers.
- Zeigen Sie, dass $y_0 = 4,6\text{ cm}$ und $\varphi_0 = -0,86\text{ (rad)}$ ist.
- Berechnen Sie die Zeitpunkte t_{01} und t_{02} der ersten beiden Nulldurchgänge und den Zeitpunkt t_1 , zu dem zum ersten Mal die maximale Auslenkung erreicht wird.
- Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit, mit der die Masse die Ruhelage passiert.
- Berechnen Sie die Gesamtenergie des Systems für $t > 0$.
- Fertigen Sie eine graphische Darstellung der zeitlichen Verläufe der Auslenkung und der kinetischen Energie der Masse an.

Aufgabe 2

Zur Messung des "Körpergewichts" (Masse) eines Astronauten im Weltall wird folgender Aufbau verwendet: Ein auf Rollen in einer Schiene geführter Sitz mit Masse $m_S = 15 \text{ kg}$, der durch eine Feder mit einer Wand verbunden ist.



- Der leere Sitz wird aus der Ruhelage ausgelenkt und führt eine freie ungedämpfte Schwingung mit $T_S = 0,4 \text{ s}$ aus. Wenn der Astronaut auf dem Sitz festgeschnallt ist, vergrößert sich die Schwingungsdauer auf $0,95 \text{ s}$. Wie groß ist die Masse des Astronauten?
- Wie groß darf die anfängliche Auslenkung, aus der der Sitz ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird, maximal sein, damit die Beschleunigung, die der Astronaut auf dem Sitz während der Schwingung ausgesetzt ist, nicht größer als 10 m/s^2 wird?
- Welche maximale Geschwindigkeit (Betrag) erreicht der Astronaut auf dem Sitz, wenn dieser bei $y = 0,2 \text{ m}$ ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird?
- An welcher Position auf der y -Achse befindet sich der Sitz mit dem Astronauten nach $2,5 \text{ s}$, wenn er bei der um $0,2 \text{ m}$ zusammengedrückten Feder ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wurde?
- Berechnen Sie die in der Feder gespeicherte Energie und die kinetische Energie, wenn der Sitz mit Astronaut bei $y = 0,2 \text{ m}$ ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wurde und sich bei $y = 0,1 \text{ m}$ befindet.

Aufgabe 3

Ein punktförmiger Körper der Masse 100 g hängt an einer Feder mit der Federkonstanten $0,987\text{ N/m}$. Die Bewegung sei ungedämpft.

- Berechnen Sie die Kreisfrequenz der Schwingung.
- Zum Zeitpunkt $t = 2\text{ s}$ passiert der Körper mit der Geschwindigkeit -3 m/s die Ruhelage. Bestimmen Sie die Amplitude und die Nullphase der Schwingung.
- Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Schwingung.
- Berechnen Sie für $t = 2\text{ s}$ die kinetische Energie, die potentielle Energie und die Gesamtenergie.

Aufgabe 4

Ein punktförmiger Körper der Masse 400 g schwingt frei und ungedämpft an einer Feder mit $D = 30\text{ Nm}^{-1}$. Der Körper wird bei $t = 0$ in 5 cm Entfernung von der Gleichgewichtslage losgelassen.

- Nach welcher Zeit schwingt er zum ersten Mal durch die Gleichgewichtslage?
- Welche Geschwindigkeit hat er dabei?

Freie gedämpfte Schwingungen

Aufgabe 5

Ein gedämpftes schwingungsfähiges System mit der Schwingungsdauer $T_d = 1,8 \text{ s}$, dem logarithmischen Dekrement $\Lambda = 3,0$ und der Masse $m = 4,5 \text{ g}$ wird zur Zeit $t = 0$ durch einen Kraftstoß mit Anfangsimpuls $p_0 = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ kg ms}^{-1}$ in positive y -Richtung aus der Ruhelage ausgelenkt.

- a) Bestimmen Sie die Größen Amplitude und Nullphase in der zur Beschreibung der Schwingung verwendeten Gleichung

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0).$$

- b) Berechnen Sie, zu welcher Zeit zum ersten Mal die maximale Auslenkung erreicht wird und wie groß die Auslenkung zu diesem Zeitpunkt ist.

Aufgabe 6

Ein Geländewagen wird in eine große Aufzugskabine gefahren und dann an einem Förderseil in einen tiefen Bergwerksschacht (ca. 1 km) abgelassen. Nach Anhalten des Aufzugmotors schwingt die Kabine mit einer Frequenz von $0,50 \text{ Hz}$ am federnden Förderseil (Federkonstante $D = 100 \text{ kN/m}$) um die Ausfahrtsebene des Stollens auf und ab. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Aufzug im tiefsten Punkt der Schwingung bei einer Amplitude von $y_0 = 0,60 \text{ m}$ nach unten (relativ zur Ruhelage), so dass der Fahrer die Ausfahrt nicht wagen kann. Bis zum Erreichen des nächsten Tiefpunkts ist die Amplitude auf 95 % abgeklungen. Der Geländewagen darf die Kabine ab $6,0 \text{ cm}$ Amplitude verlassen. Sie dürfen annehmen, dass die dämpfenden Reibungskräfte des Aufzugs proportional zur Geschwindigkeit sind.

- a) Berechnen Sie den Abklingkoeffizienten δ der gedämpften Schwingung.
- b) Wie viele Perioden muss der Fahrer nach Anhalten des Motors noch warten, bevor er losfahren kann und wie lange dauert das?
- c) Wie groß ist die gedämpfte Kreisfrequenz ω_δ , und wie groß ist die Kreisfrequenz ω_0 einer völlig ungedämpften Schwingung?
- d) Wie groß ist die schwingende Masse?

Aufgabe 7

Die Auslenkung einer dämpfungsgelagerten Maschine wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$y(t) = y_0 t e^{-\delta t},$$

mit $y_0 = 1 \frac{m}{s}$, dem Abklingkoeffizienten $\delta = 0,5 s^{-1}$ und der Dämpfungskonstanten $b = 2 \frac{kg}{s}$.

- Um welchen Spezialfall einer allgemeineren Bewegungsgleichung handelt es sich hierbei?
- Berechnen Sie die anfängliche Auslenkung $y(t = 0)$, die Anfangsgeschwindigkeit $v(t = 0)$ und den Anfangsimpuls $p(t = 0)$.
- Nach welcher Zeit t_1 wird die maximale Auslenkung erreicht?
- Wie groß ist die Auslenkung zur Zeit t_1 ?
- Wie groß sind Auslenkung und Geschwindigkeit nach $t_2 = 10 s$?
- Skizzieren Sie $y(t)$.

Aufgabe 8

An einem stark gedämpften Federpendel mit der Federkonstanten $D = 0,9 \frac{N}{m}$ hängt eine Masse mit $m = 100 g$. Die Auslenkung des Federpendels wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$y(t) = y_{10} \cdot e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + y_{20} \cdot e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}.$$

- Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω_0 der freien Schwingung ohne Dämpfung.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Federpendel mit der Geschwindigkeit $v(t = 0) = 1 \frac{cm}{s}$ aus der Ruhelage ausgelenkt. Berechnen Sie aus den Anfangsbedingungen die Konstanten y_{10} und y_{20} für den Fall, dass $\delta = 5 s^{-1}$ ist.
- Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Bewegungsgleichung.

Aufgabe 9

Ein Feder-Masse-System mit einer Masse von 1 kg und einer Federkonstanten von $1\frac{\text{N}}{\text{m}}$ wird so gedämpft, dass sein Abklingkoeffizient doppelt so groß wie die ungedämpfte Kreisfrequenz ist. Das System wird nun mit einem Anfangsimpuls von $0,1\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ aus der Ruhelage in Bewegung versetzt.

- a) Geben Sie einen Ansatz für die Bewegung, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen, an.
- b) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt zum ersten Mal ein lokales Maximum der Auslenkung erreicht wird und wie groß die Auslenkung zu diesem Zeitpunkt ist.
- c) Berechnen Sie die Auslenkung zu den Zeiten 2s , 4s und 10s .
- d) Zeichnen Sie die Bewegung für die Dauer von 0 bis 10s , unter Einbeziehung aller ermittelten Ergebnisse.

Erzwungene Schwingungen

Aufgabe 10

An eine ungedämpfte Schraubenfeder wird ein Körper der Masse $m = 300\text{ g}$ angehängt. Dadurch dehnt sich die Feder um $2,5\text{ cm}$.

- Wie groß ist die Schwingungsdauer T_0 und die Eigenkreisfrequenz ω_0 dieses Federpendels?
- Durch sinusförmiges Heben und Senken des Aufhängepunktes (Frequenz ω_e , Amplitude $y_{\text{stat}} = 3\text{ cm}$) wird der Körper zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Variiert man die Anregungsfrequenz ω_e , so gibt es, nach dem Einschwingvorgang, zwei Bereiche, in denen für die Amplitude y_{e0} der erzwungenen Schwingung gilt:

$$y_{\text{stat}} \leq y_{e0} \leq 5\text{ cm}.$$

Bestimmen Sie die Grenzfrequenzen für die beiden Bereiche und tragen Sie sie in eine Skizze der Amplitudenresonanzfrequenz ein.

Aufgabe 11

Ein gedämpfter Feder-Masse-Schwinger wird zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Der Abklingkoeffizient δ beträgt ein Zehntel der freien Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung ($\delta = 0,1 \cdot \omega_0$). Wie groß ist die maximale Amplitude im Verhältnis zur statischen Auslenkung bei einer fest vorgegebenen Amplitude der anregenden Kraft?

Aufgabe 12

Eine Maschine steht auf einem gefederten Tisch. Die Gesamtmasse von Maschine und Tischplatte beträgt $m = 200\text{ kg}$ und die effektive Federkonstante $D = 1,8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

- Berechnen Sie die Frequenz ν_0 der freien ungedämpften Schwingung der Maschine.
- Wenn die Maschine mit der Drehzahl $\nu_{e1} = 500\text{ min}^{-1}$ läuft, treten infolge einer Unwucht erzwungene Schwingungen mit der Amplitude $y_{e1} = 1,0\text{ mm}$ auf. Wie groß muss die Drehzahl gewählt werden, damit die erzwungene Amplitude auf $y_{e2} = 0,10\text{ mm}$ abnimmt? Nehmen Sie dabei an, dass sich die Amplitude der erregenden Kraft nicht mit der Drehzahl des Motors ändert.

Aufgabe 13

Ein Körper mit der Masse $m = 100\text{ g}$ hänge an einer ungedämpften Feder mit der Federkonstante $D = 0,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Durch sinusförmiges Heben und Senken des Federpendels wird der Körper zu sinusförmigen Schwingungen angeregt.

- a) Wie groß muss die Erregerfrequenz ω_e gewählt werden, damit die Amplitude der erzwungenen Schwingung, nach dem Einschwingvorgang, doppelt so groß ist wie die Amplitude der Anregungsschwingung (= statische Auslenkung)?
- b) Erstellen Sie ein Diagramm, in dem Sie ω_e gegen die Amplitude y auftragen und zeichnen Sie die beiden Lösungen für ω_e ein.

Überlagerung von Schwingungen

Aufgabe 14

Durch Überlagerung der Töne zweier Stimmgabeln, von denen die zweite durch Anbringung einer Zusatzmasse ein wenig verstimmt ist, entsteht eine Schwebung. Die Schwebungsdauer ist gleich dem 50fachen der Schwingungsdauer der unverstimmten Stimmgabel.

- Um wie viel weicht die Schwingungsdauer der zweiten Stimmgabel von der der ersten ab?
- Mit welcher Frequenz schwingt die zweite Stimmgabel, wenn die erste bei 440 Hz schwingt? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

Aufgabe 15

In einer Quarzuhr wird die Anzahl der Schwingungen eines Quarzes bestimmt. Nach jeweils 10,6 Millionen Schwingungen wird der Sekundenzeiger um eine Sekunde weiter gestellt. Zur Kalibrierung einer Quarzuhr wird die Schwingung des Quarzes in ein elektrisches Signal umgewandelt und mit dem Signal einer Atomuhr, die mit einer Frequenz von $10,600000\text{ MHz}$ schwingt, überlagert. Auf dem Oszilloskop werden alle $4,00\text{ ms}$ Spannungsmaxima angezeigt. Um wie viele Sekunden geht die Quarzuhr nach 24 h falsch?

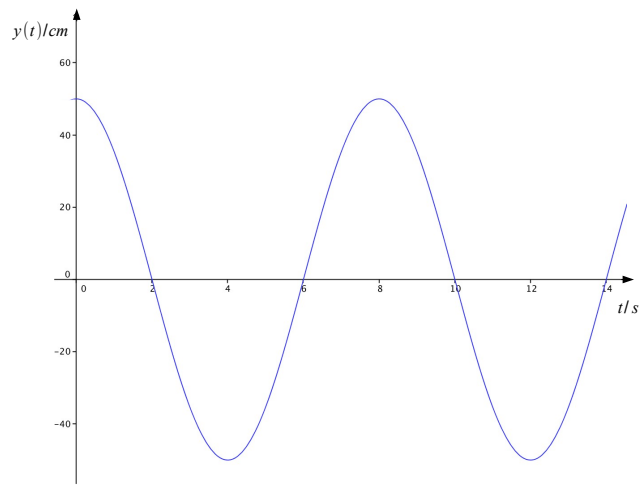
Aufgabe 16

Zwei Stimmgabeln mit unterschiedlicher Schwingungsfrequenz erzeugen eine Schwebung der Frequenz ν_s . Dabei schwingt eine Stimmgabel mit der Frequenz ν_0 , die zweite mit der Frequenz $\nu_1 = 463\text{ Hz} > \nu_0$. Wird die Frequenz ν_1 um 5% erhöht, so verdoppelt sich die Schwebungsfrequenz. Bestimmen Sie die Frequenz ν_0 .

Zur Wiederholung

Aufgabe W1

Ein Körper der Masse $2,0\text{ kg}$ wird an eine zunächst ungedämpfte Feder angehängt und durch einmalige Energiezufuhr in Schwingung versetzt. Die resultierende Bewegung, d. h. die Auslenkung als Funktion der Zeit, ist durch folgenden Graphen dargestellt:



- Bestimmen Sie anhand der Graphik die Amplitude, Schwingungsdauer, Kreisfrequenz, Federkonstante und Gesamtenergie des Masse-Feder-Systems.
- Geben Sie die zeitliche Bewegung mittels der Cosinusfunktion und der in a) ermittelten Ergebnisse an und bestimmen Sie die Nullphase.

Für die folgenden Teilaufgaben wird nun angenommen, dass die Feder unter dem Einfluss der Stokes-Reibung gedämpft sei, wobei die Reibungskonstante so gewählt wird, dass bei einer Geschwindigkeit von $1,0\text{ m/s}$ eine Reibungskraft von $0,10\text{ N}$ überwunden werden muss. Das System wird durch einen Anfangsimpuls von $1,0\text{ Ns}$ aus der Ruhelage in positiver Richtung ausgelenkt und in Schwingungen versetzt.

- Bestimmen Sie den Abklingkoeffizienten und die Schwingungsdauer.
- Geben Sie die Funktion der zeitlichen Bewegung an und bestimmen Sie die Amplitude und die Nullphase.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegung für das Intervall $[0\text{ s}; 100\text{ s}]$.
- Welche relative Abnahme ergibt sich für zwei aufeinander folgende maximale Schwingungsausschläge in gleicher Bewegungsrichtung?

Aufgabe W2

Ein gedämpftes Masse-Feder-System mit einer Masse von 200 g und einer Federkonstanten von $4,0\text{ N/m}$ wird durch periodisches Auf- und Abbewegen des Federaufhängungspunktes um jeweils $5,0\text{ cm}$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Beim Variieren der Anregungsfrequenz von 0 bis zur Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0 zeigt das System eine maximale Amplitude bei $0,9\omega_0$. Die jeweiligen Bewegungen werden nach dem Einschwingvorgang betrachtet.

- a) Berechnen Sie die maximale Amplitude des Masse-Feder-Systems.
- b) Skizzieren Sie die Amplitude des Masse-Feder-Systems als Funktion der Anregungsfrequenz.

1.6 Überblick zu Schwingungen

Frequenz

$$\nu = \frac{1}{T}$$

konstante Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Freie ungedämpfte Schwingungen

Differentialgleichung

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

allgemeine Lösung

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \beta)$$

Kreisfrequenz ω_0 für das

- Federpendel

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

- Fadenpendel

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Rückstellkraft und potentielle Energie (Spannenergie, elastische Energie)

$$F = -Dy$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}Dy^2$$

Freie gedämpfte Schwingungen

Differentialgleichung

$$y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

allgemeine Lösung

(i) für $0 < \delta < \omega_0$ (Schwingungsfall)

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \beta)$$

$$y(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega_\delta} + c_2 e^{-i\omega_\delta})$$

(ii) für $\delta = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall)

$$y(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t)$$

(iii) für $\delta > \omega_0$ (aperiodischer Fall, Kriechfall):

$$y(t) = c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t},$$

mit

$$\mu_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Reibungskraft

$$F_r = -bv$$

Kreisfrequenz

$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

mit

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

logarithmisches Dekrement

$$\delta T = \delta \frac{2\pi}{\omega_\delta}$$

Es gilt

$$\frac{y(t = t_{max} + nT)}{y(t = t_{max} + (n-1)T)} = e^{-\delta T}.$$

Gütefaktor (näherungsweise)

$$Q = \frac{\omega_\delta}{2\delta}$$

Erzwungene gedämpfte Schwingungen

Differentialgleichung

$$y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = y_a(t),$$

wobei wir

(i)

$$y_a(t) = y_{0,e} \cos(\omega_e t)$$

bzw.

(ii)

$$y_a(t) = y_{0,e} \sin(\omega_e t)$$

mit $y_{0,e} = \frac{F_{stat}}{m}$ und

$$F_{stat} =: m\omega_0^2 y_{stat}$$

verwenden. Nach dem Einschwingvorgang ist die Lösung unserer Differentialgleichung im Falle (i)

$$y(t) = A \cos(\omega_e t + \varphi)$$

mit

$$A = \frac{y_{0,e}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\delta^2 \omega_e^2}},$$

wobei

$$y_{0,e} = \omega_0^2 y_{stat},$$

und

$$\tan \varphi = -2\delta \frac{\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}.$$

Dann liegt ein Resonanzmaximum bei

$$\omega_e = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

mit

$$A = A_{max} = A(\omega_R) = \frac{F_{stat}}{m} \cdot \frac{1}{2\delta\omega_\delta}$$

vor.

Überlagerung von Schwingungen

Für die Superposition harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\alpha) \sin(\omega t) + A \sin(\alpha) \cos(\omega t) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

mit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

und

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Für die Superposition harmonischer Schwingungen gleicher Richtung und verschiedener Frequenz gilt

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) = A_s(t) \cos(\bar{\omega} t + \frac{\delta}{2}),$$

wobei

$$A_s(t) := 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\delta}{2}\right)$$

und

$$\bar{\omega} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Im Falle einer Schwebung gilt für die *Schwebungsdauer*

$$T_s = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|},$$

für die *Kreisfrequenz* ω_s der Schwebung

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = |\omega_1 - \omega_2|$$

und für die *Schwebungsfrequenz*

$$\nu_s = |\nu_1 - \nu_2|.$$

2 Wellen

2.1 Definitionen und Begriffe

Lässt sich eine physikalische Größe $u(x, t)$ hinsichtlich der räumlichen Variablen x bzw. zeitlichen Variablen t als Schwingung beschreiben, so bezeichnen wir $u(x, t)$ als *Welle*.

Um eine Vorstellung von dem räumlichen und zeitlichen Verhalten einer Wellen zu erhalten, können wir beispielsweise

die Ausbreitung einer Dichteschwankung

in einer Flüssigkeits- oder Gassäule betrachten.

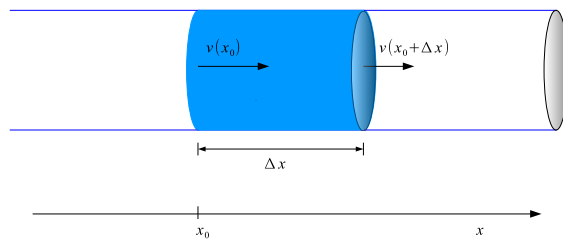


Abbildung 2.1 Dichteschwankung

Flächen, deren Punkte mit gleicher Phase schwingen, werden als *Wellenflächen* bezeichnet. Sind diese Flächen

- Ebenen, so heißen die Wellen *ebene Wellen*,
- Kugeloberflächen, so heißen die Wellen *Kugelwellen*,
- Zylindermantelflächen, so heißen die Wellen *Zylinderwellen*.

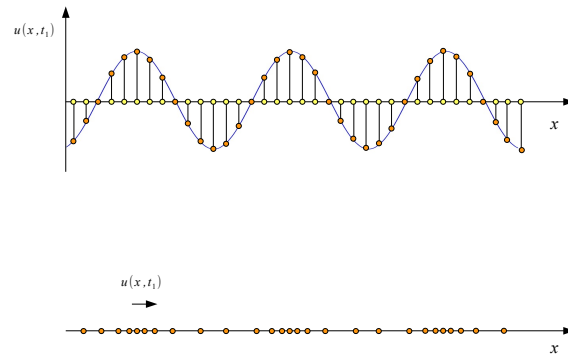
Bei Oberflächenwellen interessieren wir uns für den Fall der

Ring- oder Kreiswellen.

Dabei handelt es sich um Wellen, deren Punkte mit gleicher Phase eine Kreislinie bilden.

Wellen, deren Schwingung

- parallel zur Ausbreitungsrichtung erfolgt, werden als *longitudinale Wellen* bezeichnet,
- orthogonal zur Ausbreitungsrichtung erfolgt, werden als *transversale Wellen* bezeichnet.

**Abbildung 2.2** Transversale und longitudinale Wellen

2.2 Lösungen der Wellengleichung

Wir suchen Lösungen der homogenen *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

die gewissen Anfangs- und Randbedingungen genügen.

Im allgemeinen kann c ortsabhängig sein. Hier beschränken wir uns allerdings auf den Fall, dass die Phasengeschwindigkeit c eine (reelle) Konstante ist.

Die betrachteten Lösungen u sind Funktionen in maximal 3 Raumdimensionen x, y, z und der Zeit t .

2.2.1 Die Phasengeschwindigkeit c

Die Konstante c lässt sich für *elastische mechanische Wellen* folgendermaßen bestimmen:

- für die *Longitudinalwellen eines dünnen Stabes* mittels

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

- für die *Longitudinalwellen einer Flüssigkeits- oder Gassäule* mittels

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

wobei

- der Kompressionsmodul durch $K := \kappa^{-1}$ und die Kompressibilität durch

$$\kappa := -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp},$$

gegeben ist,

- und für Gase, wegen der adiabatischen Zustandsänderung, $K = \gamma p$ gilt,

- für die *Longitudinal- und Transversalwellen einer Saite* mittels

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}},$$

- für die *Transversalwellen in isotropen, homogenen, allseitig unbegrenzten elastischen Medien* mittels

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Dabei bezeichnet

ρ	Dichte	E	Dehnungsmodul
γ	Adiabaten- od. Isentropenexponent	K	Kompressionsmodul
p	Druck	κ	Kompressibilität
F	Kraft	G	Schub- od. Torsionsmodul
A	Querschnittsfläche		

Die Konstante c lässt sich für *elektromagnetische Wellen* folgendermaßen bestimmen:

- im Vakuum mittels

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

- in Materie mittels

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$$

Dabei bezeichnet

ϵ_0	Influenzkonstante
ϵ	Dielektrizitätskonstante
μ_0	Induktionskonstante
μ	Permeabilität

2.2.2 Ebene Wellen

Hier betrachten wir die Bewegungsgleichung in einer Raumdimension

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Eine allgemeine Lösung $u(x, t)$ dieser Gleichung ist mittels einer zweimal differenzierbaren Funktion f gegeben, wobei

$$u(x, t) = f(x \mp ct)$$

sei.

Für das Argument (die Phase) der Funktion $f(x - ct)$ gilt

$$x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1$$

oder

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1).$$

Die Ebene gleicher Phase (Wellenfläche) pflanzt sich mit der Geschwindigkeit c in x -Richtung fort. Diese Zustandsänderung heißt *ebene Welle*.

Die Funktion f bezeichnet

- mit $f(x - ct)$ eine in positiver x -Richtung,
- mit $f(x + ct)$ eine in negativer x -Richtung,

jeweils mit der Geschwindigkeit c fortschreitende ebene Welle.

Die *allgemeine Lösung* u der eindimensionalen Wellengleichung setzt sich aus den partikulären Lösungen f_1 und f_2 folgendermaßen zusammen:

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Harmonische ebene Wellen

Eine *ebene Welle* wird als *harmonisch* bezeichnet, wenn die Bewegungsgleichung die Form

$$u(x, t) = u_0 \sin\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right)$$

besitzt.

Für die Periodendauer T gilt daher

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}.$$

Die kleinste Entfernung zweier Ebenen, die sich zur gleichen Zeit in der gleichen Phase befinden, wird als *Wellenlänge* λ bezeichnet.

Mit der Phasengeschwindigkeit c erhalten wir

$$\lambda = cT = c \frac{1}{\nu}.$$

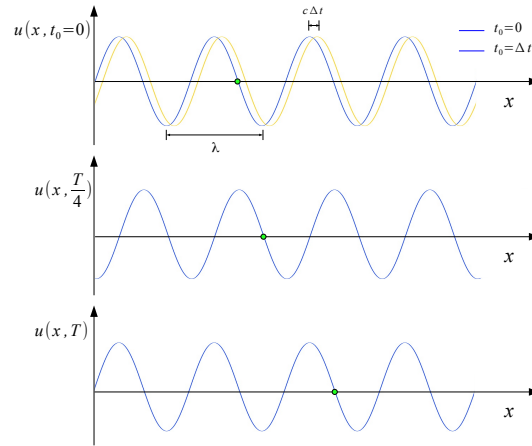


Abbildung 2.3 Die Ausbreitung einer harmonischen Welle

Die Phase $\omega(t \mp \frac{x}{c}) + \varphi_0$ lässt sich mit Hilfe der *Wellenzahl*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

umformulieren. Daher können wir ebene Wellen

$$u(x, t) = u_0 \sin(\omega(t \mp \frac{x}{c}) + \varphi_0) = u_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0)$$

auch folgendermaßen schreiben

$$u(x, t) = u_0 \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0).$$

In der üblichen komplexen Darstellung erhalten wir

$$z(x, t) = u_0 e^{i(\omega t \mp kx + \varphi_0)} = z_0 e^{i(\omega t \mp kx)},$$

wobei

$$z_0 = u_0 e^{i\varphi_0}$$

die komplexe Amplitude dieser ebenen Welle ist.

2.2.3 Kugelwellen

Gehen wir von einem punktförmigen Ort 0 der Wellenanregung aus, so stellt sich die Frage, nach einer Lösung der Wellengleichung die nur von der Entfernung r von diesem Ort 0 und der Zeit t abhängt.

Der Term Δu lässt sich mit Hilfe von Kugelkoordinaten darstellen, wobei hier lediglich die Ableitungen nach der Koordinate r auftreten und

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$$

gilt. Dabei ist das Koordinatensystem so gewählt, dass 0 im Koordinatenursprung liegt. Somit gilt $r = \|x\|$.

Die Wellengleichung nimmt daher in unserem Fall folgende Gestalt an

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = 0.$$

Da sich die Gleichung umformen lässt zu

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = 0,$$

können wir auf die Resultate zur eindimensionalen Wellengleichung zurückgreifen.

Die allgemeine Lösung unserer Wellengleichung lautet daher

$$u(r, t) = \frac{1}{r} (f_1(r - ct) + f_2(r + ct)).$$

Die Funktion u setzt sich dabei aus einer sich mit der Geschwindigkeit c von 0 aus ausbreitenden Welle

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - ct)$$

und einer sich mit der Geschwindigkeit c auf 0 hin bewegendes Welle

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f_2(r + ct)$$

zusammen.

Die Wellenflächen sind konzentrische Kugelsphären. Daher werden die Wellen *Kugelwellen* genannt.

Harmonische Kugelwellen

Eine harmonische Kugelwelle, die sich mit der Geschwindigkeit c von 0 aus ausbreitet, ist durch

$$u(r, t) = \frac{u_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

gegeben. Deren Amplitude ist $\frac{u_0}{r}$, wobei hier $u_0 \in \mathbb{C}$ sei.

Häufig werden harmonische Kugelwellen auch folgendermaßen dargestellt:

$$u(r, t) = \frac{u_0}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0)$$

Wellenflächen einer dreidimensionalen Kugelwelle

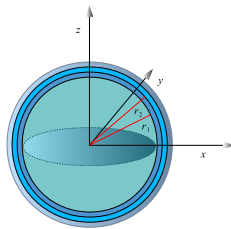


Abbildung 2.4 Wellenflächen einer Kugelwelle

2.2.4 Kreiswellen

Hierbei betrachten wir Oberflächenwellen, deren gleichphasig schwingende Punkte eine Kreislinie bilden, und nennen diese Wellen *Kreis-* oder *Ringwellen*.

- Kreiswellen entstehen beispielsweise bei kurzen Störungen der Wasseroberfläche durch relativ kleine Objekte als einmalige Störungen.
- Nehmen wir an, dass es sich nicht um eine einmalige Störung, sondern um eine *periodische Anregung* handelt, so können wir radial nach außen laufende Kreiswellen, für Abstände $r > \lambda$, in guter Näherung durch folgende Funktion darstellen:

$$u(r, t) = \frac{u_0}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr + \varphi_0).$$

Im Rahmen einer genaueren Analyse, werden harmonische Schwingungen $u(r, t)$ gesucht, deren Amplituden $\psi(r)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + k^2\psi = 0$$

genügen.

2.3 Schallwellen

Unter Schallwellen verstehen wir elastische Wellen in deformierbaren Medien.

- In Festkörpern treten elastische Longitudinal- und Transversalwellen auf.
- In Fluiden sind die elastischen Wellen Longitudinalwellen, da es keine elastischen Scherkräfte gibt.

Der für den Menschen *hörbare Schall* besitzt Frequenzen von etwa 16 Hz bis etwa 20 kHz . Schall mit Frequenzen kleiner als etwa 16 Hz wird als *Infraschall*, solcher im Bereich von 20 kHz bis 10^{10} Hz als *Ultraschall* bezeichnet. Erreicht der Schall Frequenzen von 10^{10} Hz bis 10^{13} Hz , so wird er *Hyperschall* genannt. Ultraschall lässt sich beispielsweise durch elektroakustische Schallgeber erzeugen.

2.3.1 Die Wellengleichung und die Schallgeschwindigkeit in Gasen

Nun betrachten wir die Ausbreitung einer Dichteschwankung in einer Flüssigkeits- oder Gassäule.

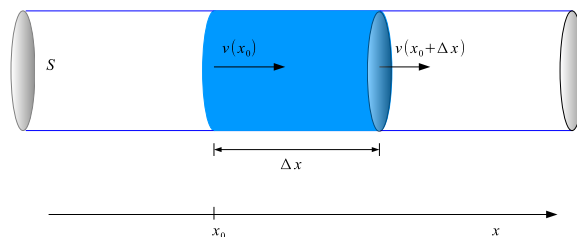


Abbildung 2.5 Dichteschwankung

Unter dem Einfluß eines Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ wirkt auf ein Volumenelement $V = S\Delta x$ die Kraft

$$F = -S\Delta x \frac{dp}{dx}$$

und daher die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} F = -\frac{1}{\rho S \Delta x} S \Delta x \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

Die Fläche $S(x_0)$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v(x_0)$ und die Fläche $S(x_0 + \Delta x)$ mit der Geschwindigkeit

$$v(x_0 + \Delta x) \approx v(x_0) + \frac{dv}{dx} \Delta x .$$

Daher ändert sich das Volumen pro Zeiteinheit um

$$\Delta V \approx S \Delta x \frac{dv}{dx} .$$

Für die relative Volumenänderung pro Zeiteinheit gilt

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{1}{S \Delta x} S \Delta x \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx} .$$

Mit der Definition der Kompressibilität κ ,

$$\kappa := -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} ,$$

die wir als zeitlich konstant voraussetzen, können wir nun die Beziehung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x}$$

folgern.

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x}$$

lassen sich, mittels Differentiation, getrennte Gleichungen für v oder p herleiten. Dabei gilt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} .$$

Auch für die Auslenkung u aus der Ruhelage erhalten wir eine solche *Wellengleichung*.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Gas beträgt

$$c = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} ,$$

wobei die Kompressibilität κ gegeben ist durch

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} .$$

Setzen wir voraus, dass

- es sich bei dem Gas um ein ideales Gas handelt,
- kein Wärmetransport innerhalb des Zeitraumes $\frac{T}{2}$ stattfindet und
- die durch die Schallwelle bedingten Zustandsänderungen des Gases Gleichgewichtszustände sind,

so ist der Zusammenhang zwischen p und V durch die entsprechende Adiabatangleichung gegeben.

Diese Adiabatangleichung lautet

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

Dabei ist γ der Adiabatenexponent.

Damit lässt sich die *Laplacesche Gleichung*

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

herleiten.

Folgende Tabelle enthält Schallgeschwindigkeitswerte für verschiedene Gase bei 20°C:

Schallgeschwindigkeit	
	c in $\frac{m}{s}$
CO_2	266
O_2	326
N_2	349
He	1007
H_2	1309

Für Luft bei 0°C und $1,013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$ beträgt die Dichte

$$\rho = 1,293 \frac{kg}{m^3}.$$

Mit $\gamma = 1,40$ erhalten wir daher

$$c = \sqrt{1,40 \cdot \frac{1,013 \cdot 10^5 m}{1,293} \frac{m}{s}} = 331,3 \frac{m}{s}.$$

2.3.2 Schallschnelle und Druckamplitude

Die Geschwindigkeit v der Teilchenbewegung einer harmonischen Welle

$$u(x, t) = u_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

lautet

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \omega u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Deren Amplitude

$$v_0 := \omega u_0$$

wird Geschwindigkeitsamplitude oder *Schallschnelle* genannt.

Wie in Abschnitt 2.3.1 hergeleitet wurde, gilt

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

und demnach

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho \omega^2 u_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Somit gilt

$$p = p_0 + \Delta p_M \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

mit

$$\Delta p_M := \omega^2 u_0 \rho k^{-1} = \omega u_0 \frac{\omega}{k} \rho = v_0 c \rho.$$

Das Verhältnis

$$\frac{\Delta p_M}{v_0} =: Z$$

wird als *akustischer* oder *Schallwiderstand* Z des Mediums bezeichnet.

2.3.3 Energiedichte und Intensität

Die räumliche Dichte der kinetische Energie einer elastischen harmonischen Welle

$$u(x, t) = u_0 \sin(\omega t - kx)$$

der Massedichte ρ beträgt

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{du}{dt} \right)^2.$$

Daher erhalten wir für die Dichte der kinetischen Energie

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Da

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2},$$

beträgt der zeitliche Mittelwert $\overline{w_{kin}}$ dieser Energiedichte

$$\overline{w_{kin}} = \frac{1}{4} \rho \omega^2 u_0^2.$$

Für die zeitlich gemittelte Dichte der (mechanischen) Gesamtenergie $w := w_{kin} + w_{pot}$, oder kurz für die *Energiedichte*, erhalten wir daher

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2.$$

Als *Intensität* I einer Welle wird

- der Zeitmittelwert ihrer Leistung
- hinsichtlich einer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehenden Fläche von 1 m^2

bezeichnet.

Demnach ergibt sich für elastische harmonische Wellen:

$$I = c \overline{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 c = \frac{1}{2} \rho v_0^2 c.$$

Die gesamte Leistung einer Schallquelle erhalten wir, wenn wir die Schallintensität in Hinblick auf eine Fläche betrachten, die die Quelle umschließt.

Das Verhältnis zweier Leistungswerte P_1 und P_2 von Wellen wird häufig in *Dezibel* (dB) ausgedrückt. Darunter wird der Wert

$$10 \lg \frac{P_1}{P_2}$$

verstanden. Da für die Intensität

$$I \sim (\Delta p_M)^2$$

gilt, lässt sich dieses Verhältnis auch als

$$20 \lg \frac{\Delta p_{M,1}}{\Delta p_{M,2}}$$

schreiben.

- Die *empfundene Lautstärke* L einer Schallwelle lässt sich gut durch ein Gesetz der Form

$$L = \text{const.} \cdot \lg I$$

annähern.

Allerdings ist die empfundene Lautstärke stark frequenzabhängig. Daher wird ein Klang (oder Geräusch) mit einem sogenannten Normalton verglichen. Dieser Ton von 1000 Hz wird mit einer Intensität I wiedergegeben, die der empfundenen Lautstärke des zu messenden Klanges gleicht.

Die minimale Intensität eines Normaltones von 1000 Hz , der noch wahrgenommen werden kann beträgt

$$I_0 = 10^{-16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}.$$

Damit wird die Lautstärke eines Klanges definiert als

$$L_N = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}.$$

Die Werte werden dabei in der Einheit *Phon* angegeben.

- Zur Berechnung absoluter Pegel werden beispielsweise der Schallintensitätspegel in dB_I mit der Referenz $1 \frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$ und der Berechnungsformel

$$L_I = 10 \cdot \lg \frac{I}{1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$$

oder der akustische Leistungspegel in dB_{PWL} (PWL: *Power Level*) mit der Referenz 1 pW und der Berechnungsformel

$$L_P = 10 \cdot \lg \frac{P}{1 \cdot 10^{-12} \text{ W}}$$

verwendet.

- Bei bewerteten absoluten Schalldruckpegeln wird das frequenzabhängige Lautstärkeempfinden des menschlichen Ohres berücksichtigt. So basiert beispielsweise die A-Bewertung mit der Angabe $dB(A)$ auf der 40-Phon-Kurve des Schalldruckpegels als Funktion der Frequenz.

Bei punktförmigen Schallquellen gilt

$$I(r) \sim r^{-2}$$

und bei linienförmigen Schallquellen

$$I(r) \sim r^{-1}.$$

2.4 Interferenz harmonischer Wellen

2.4.1 Interferenz harmonischer Wellen gleicher Frequenz

Zwei ebene harmonische Wellen gleicher Frequenz lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$u_1(x, t) = u_{0,1} \sin(\omega t - kx + \varphi_1)$$

und

$$u_2(x, t) = u_{0,2} \sin(\omega t - kx + \varphi_2)$$

Sind die Ausgangsgleichungen linear, wie beispielsweise für Wellen mit kleiner Amplitude in elastischen Medien, dann gilt das *Superpositionsprinzip*.

Der *Gangunterschied* der beiden Wellen beträgt

$$\Delta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k} = \lambda \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}.$$

Bei Interferenz der beiden harmonischer Wellen entsteht eine harmonische Welle, deren Amplitude von $u_{0,1}$ und $u_{0,2}$ und dem Gangunterschied jener Wellen abhängt.

Bei Wellen mit

- dem Gangunterschied

$$n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Phasendifferenz } 0)$$

addieren sich die Amplituden

- dem Gangunterschied

$$(2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Phasendifferenz } \pi)$$

subtrahieren sich die Amplituden.

Überlagerung zweier Wellen bei Gangunterschied $n\lambda$, $n \in \mathbb{N}_0$

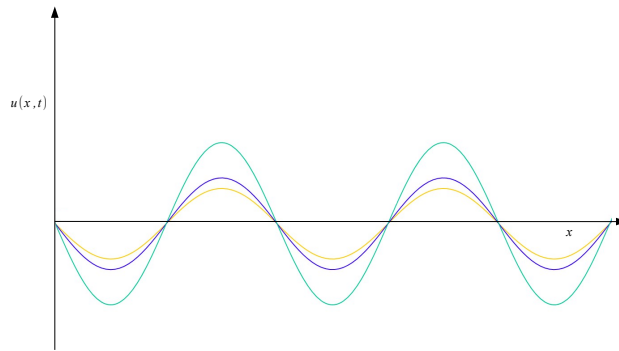


Abbildung 2.6 Überlagerung bei einem Gangunterschied von $n\lambda$

Überlagerung zweier Wellen gleicher Amplitude bei Gangunterschied $(2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$

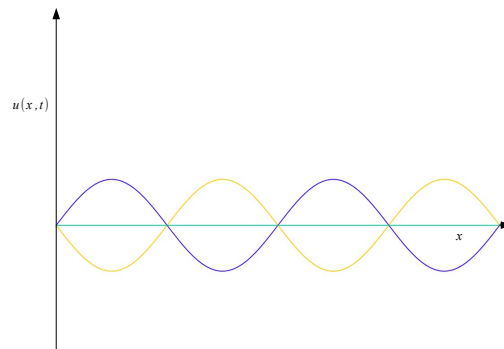


Abbildung 2.7 Überlagerung bei einem Gangunterschied von $(2n + 1)\frac{\lambda}{2}$

Für die Überlagerung der Wellen

$$u_1(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

und

$$u_2(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx) + u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ &= A_\varphi \cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei

$$A_\varphi := 2u_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Der Betrag von A_φ ist im Falle

- $\varphi = 2n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{N}_0$

maximal und hat den Wert $2u_0$ (*konstruktive Interferenz*),

- $\varphi = (2n + 1) \cdot \pi$, $n \in \mathbb{N}_0$

minimal und hat den Wert 0 (*destruktive Interferenz*).

Dieses Interferenzverhalten wird beispielsweise genutzt bei

- der Längenmessung mit Hilfe eines Interferometers,
- der Messung der Schallgeschwindigkeit mit der Quinckeschen Posaune,
- der Bestimmung der Richtcharakteristik von Antennen und Schallquellen.

Längenmessung mit Hilfe eines Interferometers

Kalibrierung eines Maßstabs

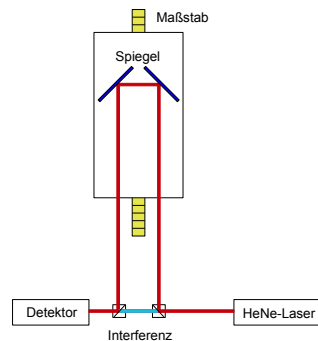


Abbildung 2.8 Längenmessung am Interferometer

Es gilt

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Gilt für den Wegunterschied Δ beider Strahlen

- $\Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, so tritt destruktive Interferenz auf,
- $\Delta = n\lambda$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, so tritt konstruktive Interferenz auf.

Die resultierende "Amplitude" A_φ ist proportional zu

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Delta}{\lambda}\pi\right).$$

Messung der Schallgeschwindigkeit mit der Quinckeschen Posaune

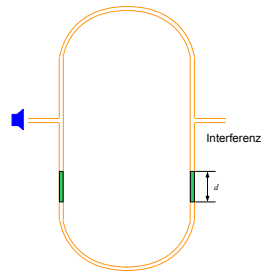


Abbildung 2.9 Messung der Schallgeschwindigkeit

Bei der Frequenz $\nu = 1,69 \text{ kHz}$ tritt destruktive Interferenz, mit einem Abstand $d = 10,5 \text{ cm}$ zwischen zwei Minima, auf.

Da $\Delta = \lambda$ und $c = \lambda\nu$ ist, erhalten wir für die Schallgeschwindigkeit

$$c = 0,21 \text{ m} \cdot 1690 \frac{1}{\text{s}} = 354 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Das Kundtsche Staubrohr

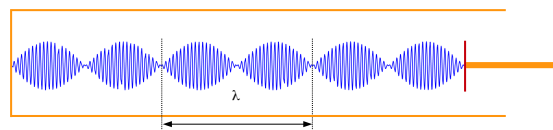


Abbildung 2.10 Schallgeschwindigkeit und stehende Wellen

Wird das Kundtsche Staubrohr beispielsweise mit Korkmehl gefüllt, so kann, anhand der durch Längsschwingungen des eingespannten Stabes verursachten stehenden Wellen im Inneren des Rohres, das Verhältnis der Schallgeschwindigkeit in Luft zur der im Stabmaterial bestimmt werden.

Bestimmung der Richtcharakteristik zweier punktförmiger Quellen

Hier untersuchen wir die Richtungsabhängigkeit der Interferenz zweier harmonischer Wellen, die synchron und mit gleicher Amplitude von zwei punktförmigen Quellen ausgesandt werden.

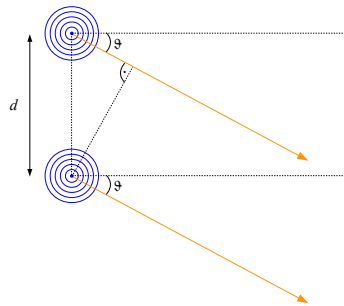


Abbildung 2.11 Interferenz von Wellen

Für den Wegunterschied Δ gilt

$$\Delta = d \sin \vartheta .$$

Die resultierende "Amplitude" A_φ ist proportional zu

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Delta}{\lambda}\pi\right)$$

und die Intensität S proportional zu A_φ^2 .

Für die Richtungen mit *konstruktiver Interferenz* gilt

$$\sin \vartheta = n \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0 ,$$

für die Richtungen mit *destruktiver Interferenz* gilt

$$\sin \vartheta = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0 .$$

2.4.2 Interferenz harmonischer Wellen verschiedener Frequenz

Unterscheiden sich die Frequenzen zweier ebener harmonischer Wellen nur wenig, so entstehen sogenannte *Wellengruppen*.

Betrachten wir zwei derartige Wellen mit gleicher Amplitude,

$$u_1(x, t) = u_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

und

$$u_2(x, t) = u_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t),$$

so erhalten wir für die Überlagerung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) \\ &= 2u_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \end{aligned}$$

Diese Interferenz können wir auch folgendermaßen darstellen

$$u(x, t) = A_s(x, t) \cdot \sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t),$$

wobei

$$A_s(x, t) := 2u_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

und

$$\bar{k} := \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

sowie

$$\Delta k := k_1 - k_2, \quad \Delta \omega := \omega_1 - \omega_2.$$

Nach Voraussetzung gilt $\Delta k \ll \bar{k}$ und $\Delta \omega \ll \bar{\omega}$.

Für festes x ist $u(x, \cdot)$ eine Schwebung.

Für jeweils festes t erhalten wir Wellengruppen $u(., t)$ der Form

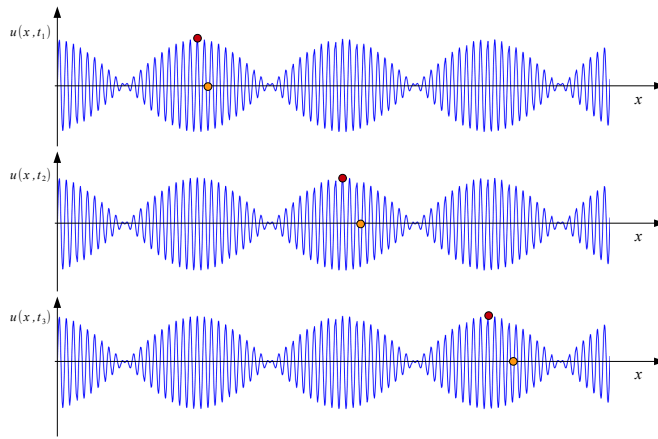


Abbildung 2.12 Bewegung einer Wellengruppe

Die *Phasengeschwindigkeit* c dieser Wellengruppe ist die Geschwindigkeit,

mit der sich die Wellenphase $\bar{k}x - \bar{\omega}t$ fortpflanzt.

Diese ist gegeben durch

$$c = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}.$$

Die Phase von $A_s(x, t)$ ist

$$\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t.$$

Diese Phase, und daher beispielsweise auch das Maximum von A_s , bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$c_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k},$$

der sogenannten *Gruppengeschwindigkeit*.

Allgemeiner wird die *Gruppengeschwindigkeit* als der zugehörige Limes für $\Delta k \rightarrow 0$ bezeichnet und daher folgendermaßen definiert:

$$c_g := \frac{d\omega}{dk}.$$

Mittels $\omega = kc$ erhalten wir die *Rayleighsche Gleichung*

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk}.$$

Verwenden wir $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, so erhalten wir

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}.$$

Für einen Vergleich der Gruppengeschwindigkeit c_g mit der Phasengeschwindigkeit c ist der Term $dc/d\lambda$ interessant. Ist

- $\frac{dc}{d\lambda} > 0$, so sprechen wir von *normaler Dispersion*
- $\frac{dc}{d\lambda} < 0$, so sprechen wir von *anomaler Dispersion*.

Im Falle $\frac{dc}{d\lambda} = 0$ liegt keine Dispersion vor.

2.4.3 Stehende Wellen

Durch Überlagerung zweier einander entgegenlaufender ebener harmonischer Wellen gleicher Amplitude und Wellenlänge erhalten wir stehende Wellen.

Hier betrachten wir folgende Wellengleichungen:

$$u_1(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

und

$$u_2(x, t) = u_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

Dann ergibt sich als Überlagerung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx) + u_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) \\ &= A_\varphi(x) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei

$$A_\varphi(x) := 2u_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Für einen festen Ort x ist

- $u(x, \cdot)$ eine harmonische Schwingung und
- $-|A_\varphi(x)| \leq u(x, \cdot) \leq |A_\varphi(x)|$.

Der Term $\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$ ist ortsunabhängig und stellt eine harmonische Schwingung dar.

Die Funktion $u(x, t)$ setzt sich an jedem Ort aus harmonischen Schwingungen zusammen, wobei lediglich die "Amplitude" $A_\varphi(x)$ eine Funktion des Ortes ist.

Daher beschreibt $u(x, t)$ eine *stehende Welle*.

Beispielsweise sind die Orte der *Schwingungsbäuche*, d.h. die Stellen x mit

$$|A_\varphi(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |A_\varphi(x)| = 2u_0$$

und die Orte der *Knoten*, d.h. die Stellen x mit

$$|A_\varphi(x)| = 0$$

zeitlich unveränderlich.

Die Schwingungsbäuche und -knoten sind folgendermaßen verteilt:

An den Stellen x mit

- $|\cos(kx + \frac{\varphi}{2})| = 1$ tritt ein Schwingungsbauch
- $|\cos(kx + \frac{\varphi}{2})| = 0$ tritt ein Schwingungsknoten

auf.

Der Abstand benachbarter Schwingungsbäuche bzw. -knoten beträgt $\frac{\lambda}{2}$.

Wird eine ebene harmonische Welle mit ihrer ohne Phasensprung reflektierten Welle überlagert, so entsteht eine stehende Welle der dargestellten Form:

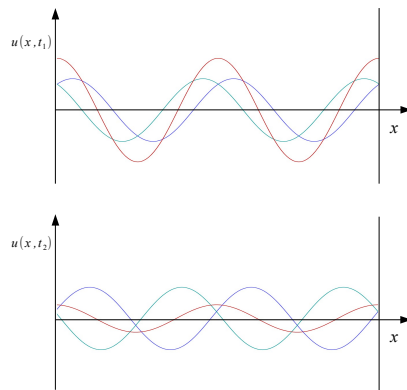


Abbildung 2.13 Entstehung einer stehenden Welle bei Reflexion ohne Phasensprung

Wird eine ebene harmonische Welle mit ihrer reflektierten und um π phasenverschobenen Welle überlagert, so entsteht eine stehende Welle der dargestellten Form:

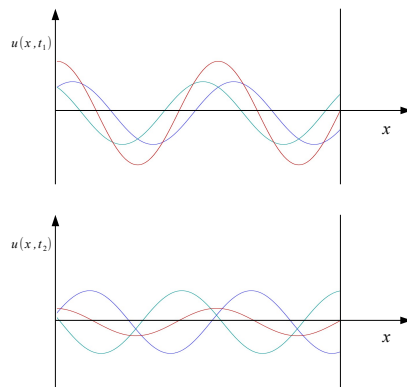


Abbildung 2.14 Entstehung einer stehenden Welle bei Reflexion mit Phasensprung π

Stehende Wellen treten beispielsweise auf bei

- Reflexion von Schallwellen

Beispiele:

- gedeckte und offene Orgelpfeifen
- "Kundtsches Staubrohr"
- Reflexion an "dünnere" und "dichtere" Medien
- Reflexion elektromagnetischer Wellen an Metallflächen
- eingespannten Saiten, Seilen und Stäben.

Eingespante schwingende Saite

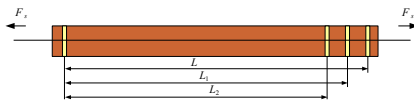


Abbildung 2.15 Schwingende Saite

Anmerkungen

Frequenzverhältnis bei Oktave: $\frac{\nu_{12}}{\nu_0} = 2$

Eine Oktave umfasst 12 Halbtonschritte.

Beispiel

Auf eine Saite der Masse $m = 3,38 \text{ g}$ und Länge $L = 57,7 \text{ cm}$ werde eine Kraft $F = 300 \text{ N}$ ausgeübt.

Dann beträgt die Phasengeschwindigkeit c der Transversalwelle dieser Saite

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{300 \text{ N} \cdot 0,577 \text{ m}}{0,00338 \text{ kg}}} = 226 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Für die Grundfrequenz ν_0 gilt

$$\nu_0 = \frac{c}{2L} = 196 \text{ Hz}$$

und für die Frequenzen der nächsten zwölf Halbtöne

$$\nu_n = 2^{\frac{n}{12}} \nu_0, \text{ wobei } n = 1, 2, \dots, 12.$$

Das sind die Frequenzwerte

$$\nu_n = \frac{c}{2L_n}$$

mit

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{12}} L.$$

Reflexion elektromagnetischer Wellen an Metallflächen

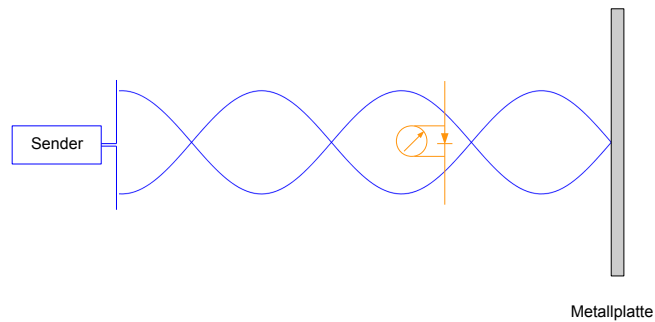


Abbildung 2.16 Reflexion elektromagnetischer Wellen

Beispiel

Beträgt die Sendefrequenz $\nu = 433,92 \text{ MHz}$ und der Abstand zweier Knoten des elektrischen Feldes $D = \frac{\lambda}{2} = 34 \text{ cm}$, so erhalten wir für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \lambda \cdot \nu = 0,68 \text{ m} \cdot 433,92 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} = 2,95 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zum Vergleich der Literaturwert für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c_0 = 2,99793... \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eigenschwingungen einer Saite

Wir betrachten Lösungen $u(x, t)$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für eine schwingende Saite. Zusätzlich sollen diese Lösungen $u(x, t)$ von der Form

$$u(x, t) = u(x) \cdot e^{i\omega t}$$

sein und die Randbedingung

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

erfüllen.

Daher muss $u(x)$ der (Eigenwert-) Gleichung

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0$$

genügen. Zwar sind die Funktionen

$$\cos(kx) \quad \text{und} \quad \sin(kx)$$

Partikularlösungen dieser Gleichung, doch genügt $\cos(kx)$ nicht den Randbedingungen.

Die Lösungen zeigt die folgende Abbildung:

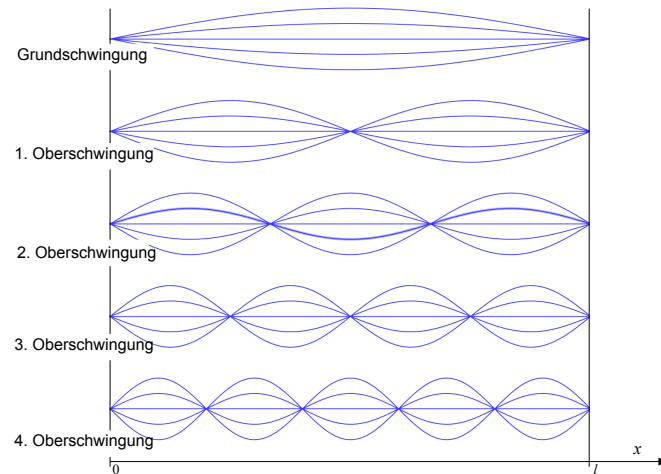


Abbildung 2.17 Grund- und Oberschwingungen bei festen Enden

Die Konstante k ist durch die Randbedingungen bestimmt.

Wegen der Randbedingung

- kann $\cos(kx)$ keine Lösung des Randwertproblems sein
- muss k folgenden Bedingungen genügen:

$$k = k_n = n \frac{\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Werte k_n^2 werden *Eigenwerte*, die Lösungen

$$\sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right)$$

Eigenfunktionen und die zugehörigen Frequenzen

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}$$

Eigenfrequenzen genannt.

Dabei ist c folgendermaßen gegeben:

- für Longitudinalwellen

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- für Transversalwellen

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}.$$

Eigenschwingungen eines Stabes

Nun betrachten wir Lösungen $u(x, t)$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für einen Stab mit kreisförmigen Querschnitt. Dabei soll der Stab zu Longitudinal- oder Torsionsschwingungen angeregt werden. Für Torsionsschwingungen verstehen wir unter u den Drehwinkel.

Biegeschwingungen werden hier nicht betrachtet.

Es gilt im Falle von

- Longitudinalschwingungen

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Torsionsschwingungen

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Der Stab sei an zumindest einem Ende eingespannt.

Insgesamt sind die Randbedingungen

- bei festen Enden

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

- bei freien Enden

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

- bei einem festen und einem freien Ende

$$u(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Wir erhalten folgende *Eigenfrequenzen* und *Eigenschwingungen*:

- bei festen Enden

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}, \quad u_n(x, t) = u_{n,0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega_n t + \gamma_n)$$

- bei freien Enden

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}, \quad u_n(x, t) = u_{n,0} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega_n t + \gamma_n)$$

- bei einem festen und einem freien Ende

$$\nu_n = (2n - 1) \frac{c}{4l}, \quad u_n(x, t) = u_{n,0} \sin\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2l}\right) \sin(\omega_n t + \gamma_n),$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

Grund- und Oberschwingungen lassen sich, abhängig von den Randbedingungen, auch folgendermaßen darstellen:

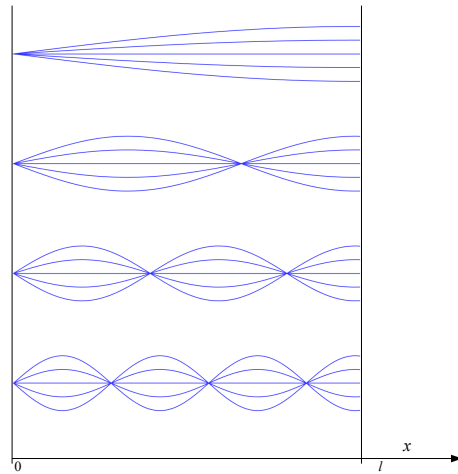


Abbildung 2.18 Grund- und Oberschwingungen bei einem festen und einem freien Ende

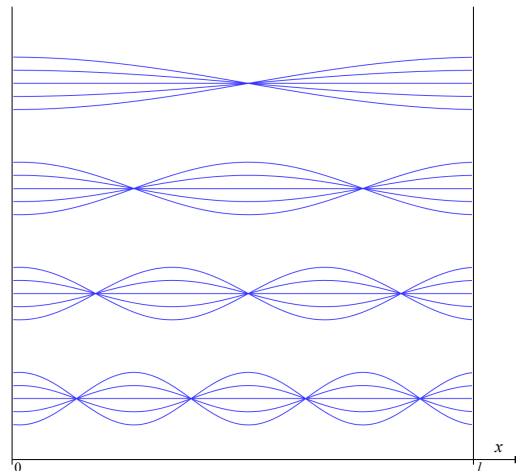


Abbildung 2.19 Grund- und Oberschwingungen bei freien Enden

2.5 Wellenausbreitung nach Huygens und Fresnel

2.5.1 Elementarwellen

Das Huygenssche Prinzip

Der Ausbreitungsvorgang einer Welle wird so konstruiert, dass von jedem Punkt einer Wellenfläche eine kugelförmige "Elementarwelle" ausgeht.

Die Einhüllende dieser Elementarwellen ergibt die Wellenfläche für einen späteren Zeitpunkt.

Beispielsweise lassen sich

- das *Reflexionsgesetz* und
- das *Brechungsgesetz* nach Snellius

mit Hilfe des Huygensschen Prinzips herleiten.

Nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip ergibt sich die Wellenanregung in einem Punkt als Überlagerung aller von verschiedenen Punkten ausgehenden Elementarwellen, wobei deren Phase berücksichtigt wird.

Mit diesem Prinzip kann beispielsweise die Interferenz an *Beugungsgittern* erklärt werden.

2.5.2 Beugung und Interferenz

Hier betrachten wir die *Beugung* ebener Wellen, die in Normalenrichtung auf eine Ebene mit einer schmalen Öffnung auftreffen.

Diese Beugung lässt sich erklären durch die Annahme, dass die einfallende Welle an der Öffnung (halb-)kugelförmige Elementarwellen entstehen lässt.

Fraunhofersche Lichtbeugung an einem Spalt

Die Gangdifferenz der Randstrahlen beträgt nach der Beugung $d = \overline{BC}$ und demnach die Phasendifferenz dieser Strahlen

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi b \sin \vartheta}{\lambda}.$$

Wenn p Teilwellen interferieren, beträgt die Phasendifferenz zweier benachbarter Strahlen daher

$$\delta = \frac{2\pi b \sin \vartheta}{p\lambda}.$$

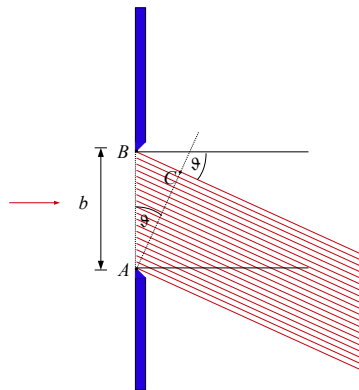


Abbildung 2.20 Lichtbeugung an einem Spalt

Ist P ein Punkt auf dem Schirm und $l = \overline{AP}$, so ergibt sich die Lichtfeldstärke E_ϑ mittels

$$E_\vartheta \sim \frac{b}{p} \operatorname{Re}(e^{i2\pi(\nu t - \frac{l}{\lambda})}(1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + \dots + e^{-i(p-1)\delta})),$$

mit

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{-ik\delta} = \frac{e^{-i\delta p} - 1}{e^{-i\delta} - 1} = \frac{e^{-i\frac{1}{2}p\delta}}{e^{-i\frac{1}{2}\delta}} \cdot \frac{e^{i\frac{1}{2}p\delta} - e^{-i\frac{1}{2}p\delta}}{e^{i\frac{1}{2}\delta} - e^{-i\frac{1}{2}\delta}} = e^{-i\frac{1}{2}\delta(p-1)} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}p\delta)}{\sin(\frac{1}{2}\delta)},$$

und damit für $p \rightarrow \infty$ als

$$E_{\vartheta} \sim b \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cos\left(2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right) - \frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Für die Intensität gilt demnach

$$I_{\vartheta} \sim \overline{E_{\vartheta}^2} \sim \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi b \sin \vartheta}{\lambda}.$$

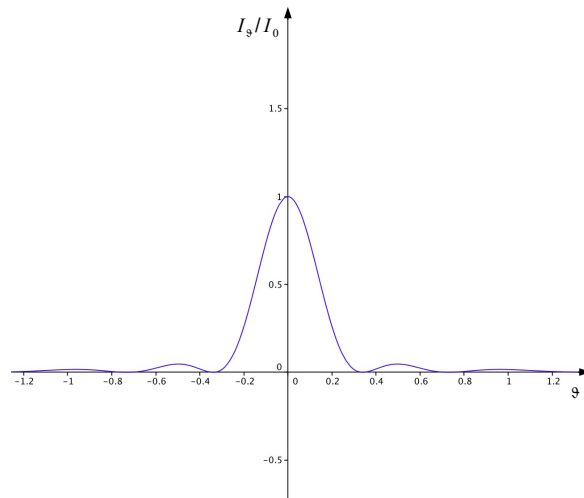


Abbildung 2.21 Intensität I_{ϑ} bei Beugung an einem Spalt

Die Minima treten für Beugungswinkel ϑ_k auf, für die gilt

$$\sin \vartheta_k = \frac{k\lambda}{b}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für den hier ausgeschlossenen Fall $k = 0$ erhalten wir den Beugungswinkel $\vartheta_0 = 0$ des (zentralen) Hauptmaximums.

Beugung an einem Beugungsgitter

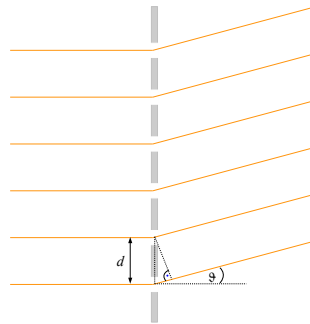


Abbildung 2.22 Beugungsgitter

d : Gitterkonstante

p : Anzahl der Öffnungen

ϑ : Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung der einfallenden und der abgelenkten Wellen

Parallele Strahlen, die von zwei benachbarten Öffnungen ausgehen, und jeweils um ϑ abgelenkt werden, weisen den Gangunterschied

$$\Delta = d \sin \vartheta$$

auf.

Betrachten wir lediglich Überlagerungen zweier Wellen, die an zwei Öffnungen im Abstand d gebeugt werden, so gilt

für die Richtungen mit *konstruktiver Interferenz*

$$\sin \vartheta = n \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0,$$

und für die Richtungen mit *destruktiver Interferenz*

$$\sin \vartheta = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wenn wir auch die Beugungserscheinungen an jedem einzelnen Spalt der Breite b berücksichtigen, ist es sinnvoll, sich den Einfluss eines Gitters, mit $b \ll d$, auf die Wellenintensität I_ϑ als Produkt

- der über einen Einzelspalt gemittelten Intensität, der in Richtung ϑ gesandten Strahlung, $\overline{E_\vartheta^2}$ und

- der Intensitätsverteilung zu denken, die sich durch die Laufzeitunterschiede $d \sin \vartheta$ ergibt.

Zwei parallele Strahlen mit Abstand x weisen eine Phasendifferenz von

$$\delta = \frac{2\pi x \sin \vartheta}{\lambda}$$

auf.

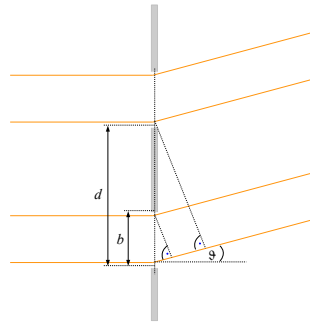


Abbildung 2.23 Beugung an zwei benachbarten Spalten

Die Phasendifferenz der Randstrahlen eines Spaltes der Breite b beträgt

$$\delta_1 = \frac{2\pi b \sin \vartheta}{\lambda}$$

und die Phasendifferenz zweier im Abstand d das Beugungsgitter passierender Strahlen beträgt

$$\delta_2 = \frac{2\pi d \sin \vartheta}{\lambda}.$$

Extrema durch Interferenzen an einer Öffnung werden historisch als Extrema I. Klasse, solche durch Zusammenwirken mehrerer Öffnungen als Extrema II. Klasse bezeichnet.

Nach der Theorie zur Fraunhofer-Beugung an einem Einzelspalt gilt

$$\overline{E_\vartheta^2} \sim \frac{\sin^2\left(p \frac{\delta_1}{2}\right)}{\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2}$$

und nach Berechnungen zur Vielstrahlinterferenz für Strahlen mit der Phasendifferenz δ_2 gilt für die Gesamtintensität

$$\frac{\sin^2\left(p \frac{\delta_2}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta_2}{2}\right)}.$$

Da wir die Varianz der Phasenunterschiede als klein gegenüber der Phasendifferenzen zwischen Strahlen benachbarter Spalten betrachten, erhalten wir daher für die Beugungsintensität von p Strahlen

$$I_{\vartheta} \sim \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{p\pi}{\lambda} d \sin \vartheta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \vartheta \right)}.$$

Für $p = 2$ erhalten wir

$$I_{\vartheta} \sim \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta \right)^2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \vartheta \right).$$

Minima I. Klasse treten auf, wenn der Zähler des ersten Faktors verschwindet. Das ist für

$$\sin \vartheta_l = l \cdot \frac{\lambda}{b}, \quad l \in \mathbb{N},$$

der Fall.

Für $l = 0$ tritt ein Maximum, das Zentralmaximum I. Klasse, auf.

Minima II. Klasse treten auf, wenn $\cos \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \vartheta \right)$ verschwindet. Das ist für

$$\sin \vartheta_m = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d}, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

der Fall.

Maxima II. Klasse (Hauptmaxima) liegen an den Orten mit $|\cos(\frac{\pi}{\lambda}d \sin \vartheta)| = 1$, d.h. an den Stellen mit

$$\sin \vartheta_n = n \frac{\lambda}{d}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

falls dort kein Minimum I. Klasse liegt.

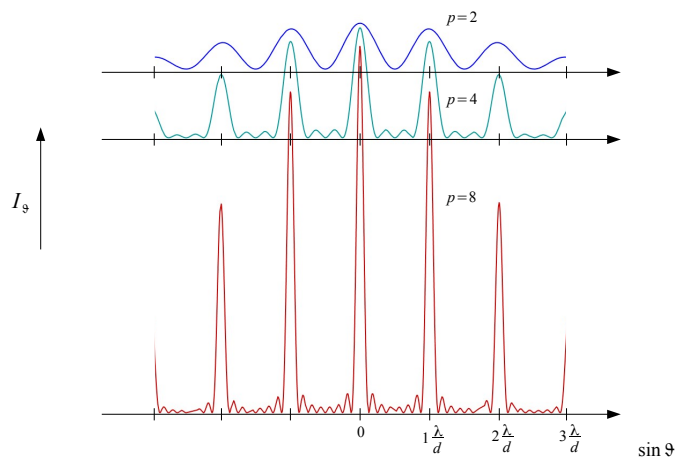


Abbildung 2.24 Qualitative Intensitätsverteilung bei der Beugung an p Spalten, falls $b \ll d$

Es gilt demnach

$$\sin \alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{c_1 t}{\overline{AB}}$$

und

$$\sin \beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{c_2 t}{\overline{AB}}$$

Damit ergibt sich das *Brechungsgesetz von Snellius (1621)*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Nehmen wir an, dass Licht vom Vakuum in ein Medium eintritt, so lässt sich mit Hilfe des *Brechungsindex* n

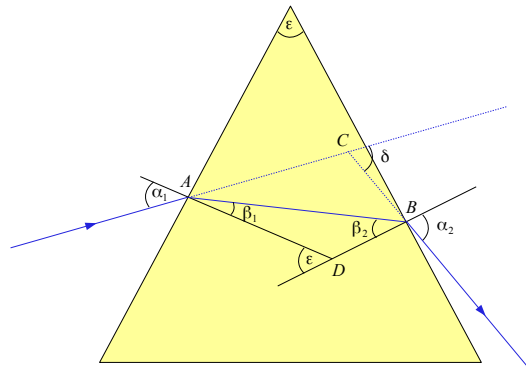
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \frac{c}{c_2}$$

schreiben und demnach allgemein

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Beim Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium wird der Lichtstrahl zum Einfallslot hin gebrochen. Umgekehrt wird ein Lichtstrahl, der vom optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium eintritt, vom Einfallslot weg gebrochen. *Totalreflexion* tritt auf, wenn Licht in letzterem Fall mit einem Einfallswinkel $\alpha \geq \alpha_g$ auf die Grenzfläche trifft, wobei

$$\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1} < 1.$$

Brechung des Lichts am Prisma**Abbildung 2.27** Lichtbrechung am Prisma

Für die Brechung des Lichts am Prisma erhalten wir mit

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

und

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2$$

die Gleichung

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon .$$

Da ferner nach dem Brechungsgesetz

$$\sin \alpha_i = n \sin \beta_i , \quad i = 1, 2 ,$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 &= n \sin(\varepsilon - \beta_1) = n \sin \varepsilon \cos \beta_1 - n \cos \varepsilon \sin \beta_1 \\ &= \sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \varepsilon \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

und somit für den Ablenkungswinkel

$$\delta = \alpha_1 + \arcsin(\sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \varepsilon \sin \alpha_1) - \varepsilon .$$

Sind Eintrittswinkel α_1 und Austrittswinkel α_2 gleich, so ist der Ablenkungswinkel $\delta = \delta_{min}$, d. h. minimal. Bei diesem symmetrischen Durchgang gilt

$$\delta_{min} = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon .$$

Damit lässt sich die Brechzahl des Prismenmaterials bestimmen.

Descartes Theorie des Regenbogens

Bekanntlich erscheint ein Hauptregenbogen unter einem Blickwinkel von etwa 42° mit einem äußeren roten Rand und meist zusätzlich ein Nebenregenbogen unter einem Winkel von etwa 52° mit einem inneren roten Rand. Ferner treten manchmal weitere, sogenannte sekundäre Regenbögen auf.

René Descartes erklärte 1637 den Haupt- bzw. Nebenregenbogen durch Lichtbrechung und einmalige bzw. doppelte Reflexion an der Rückseite der Regentropfen.

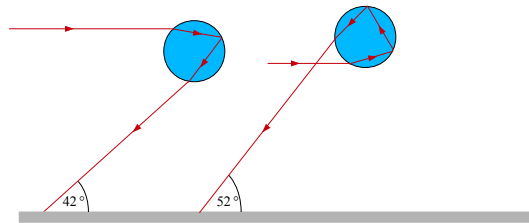


Abbildung 2.28 Brechung und Reflexion von Lichtstrahlen in Wassertropfen

Eine genauere Beschreibung gab G. B. Airy 1838, wobei er von Beugungseffekten nichtsphärischer Wellen ausging.

2.5.4 Akustischer Doppler-Effekt

Wir nehmen an, dass eine Schallquelle Wellen der Frequenz ν und Wellenlänge λ aussendet und sich diese Quelle Q oder der Beobachter B gegenüber dem Ausbreitungsmedium der Welle bewegt.

(i) *bewegte Quelle, ruhender Beobachter*

Nähert sich die Schallquelle mit der Geschwindigkeit v_Q einem relativ zum Medium ruhenden Beobachter, so bewegt sich

- die Welle während der Schwingungsdauer $T_0 = \nu_0^{-1}$ um die Distanz λ_0 und
- die Quelle um

$$v_Q T_0 = \frac{v_Q}{\nu_0}$$

weiter.

Die Wellenlänge, definiert als Abstand benachbarter Punkte gleicher Phase, hat sich daher verändert.

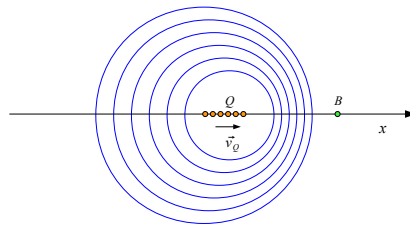


Abbildung 2.29 Akustischer Doppler-Effekt

Bewegt sich die Quelle mit v_Q auf den Beobachter zu, so empfängt der Beobachter die (verkleinerte) Wellenlänge

$$\lambda_B = \lambda_0 - \frac{v_Q}{\nu_0} = \frac{c}{\nu_0} \left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$$

und die Frequenz

$$\nu_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_Q}{c}}.$$

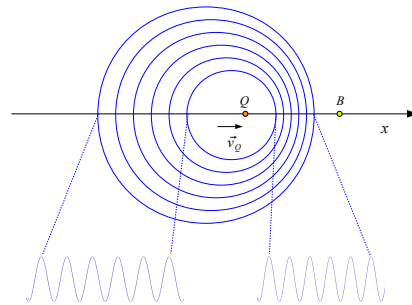


Abbildung 2.30 Doppler-Verschiebung

Entfernt sich die Quelle mit v_Q vom Beobachter, so empfängt der Beobachter die (vergrößerte) Wellenlänge

$$\lambda_B = \lambda_0 + \frac{v_Q}{\nu_0} = \frac{c}{\nu_0} \left(1 + \frac{v_Q}{c}\right)$$

und die Frequenz

$$\nu_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_Q}{c}}.$$

Beispiel: Bestimmung von v_Q

Seien v_Q und ν_Q konstant. Bewegt sich die Quelle mit v_Q auf den ruhenden Beobachter zu, so wird die Frequenz $\nu_{B_1} = 1114 \text{ Hz}$ gemessen, bewegt sie sich von dem Beobachter fort, so wird $\nu_{B_2} = 950 \text{ Hz}$ gemessen.

Es gilt

$$\nu_{B_1} = \frac{\nu_Q}{1 - \frac{v_Q}{c}} \quad \text{und} \quad \nu_{B_2} = \frac{\nu_Q}{1 + \frac{v_Q}{c}}$$

und daher

$$\frac{\nu_{B_1}}{\nu_{B_2}} = \frac{1 + \frac{v_Q}{c}}{1 - \frac{v_Q}{c}} = \frac{c + v_Q}{c - v_Q}.$$

Demnach beträgt die Geschwindigkeit

$$v_Q = \frac{\nu_{B_1} - \nu_{B_2}}{\nu_{B_1} + \nu_{B_2}} \cdot c = 27 \frac{m}{s}.$$

(ii) *ruhende Quelle, bewegter Beobachter*

Nähert sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit v_B einer relativ zum Medium ruhenden Schallquelle, so empfängt der Beobachter in der Zeit Δt zusätzlich einen Wellenabschnitt mit

$$\Delta n = v_B \cdot \frac{\Delta t}{\lambda_0}.$$

Wellenlängen.

Zusätzlich zur Frequenz ν_0 empfängt der bewegte Beobachter daher

$$\Delta \nu = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{v_B}{\lambda_0} = \nu_0 \frac{v_B}{c}$$

Schwingungen pro Zeiteinheit.

Bewegt sich der Beobachter mit v_B auf die Quelle zu, so empfängt er eine Welle der Frequenz

$$\nu_B = \nu_0 \left(1 + \frac{v_B}{c}\right),$$

entfernt er sich mit v_B von der Quelle, so empfängt er eine Welle der Frequenz

$$\nu_B = \nu_0 \left(1 - \frac{v_B}{c}\right).$$

(iii) *bewegte Quelle, bewegter Beobachter*

Nach den Abschnitten (i) und (ii) erhalten wir daher folgende Frequenzverschiebungen:

- Quelle bewegt sich auf den ruhenden Beobachter zu:

$$\nu_B = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_Q}{c}}$$

- Quelle entfernt sich von dem ruhenden Beobachter:

$$\nu_B = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_Q}{c}}$$

- Beobachter bewegt sich auf die ruhende Quelle zu:

$$\nu_B = \nu_0 \left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$$

- Beobachter entfernt sich von der ruhenden Quelle:

$$\nu_B = \nu_0 \left(1 - \frac{v_B}{c}\right)$$

Um diese Bewegungsarten zu kombinieren, denken wir uns einen weiteren im Medium ruhenden Punkt $\tilde{B} \equiv \tilde{Q}$. Damit erhalten wir:

- Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu, Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c + v_B}{c - v_Q}$$

- Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu, Beobachter entfernt sich von Quelle:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c - v_B}{c - v_Q}$$

- Quelle entfernt sich von Beobachter, Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c + v_B}{c + v_Q}$$

- Quelle entfernt sich von Beobachter, Beobachter entfernt sich von Quelle:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c - v_B}{c + v_Q}$$

(iv) *bewegte Quelle (allgemeinere Bewegungsrichtung), ruhender Beobachter*

Wir betrachten wieder eine gleichförmige Bewegung der Quelle Q und einen relativ zum Ausbreitungsmedium ruhenden Beobachter B . Die Distanz der Quelle zum Beobachter soll sich verringern. Allerdings muss die Geschwindigkeit \vec{v}_Q nicht notwendigerweise parallel zu \vec{QB} sein.

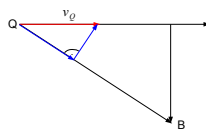


Abbildung 2.31 Geschwindigkeit v_Q

Wir zerlegen \vec{v}_Q in eine Komponente $v_{Q\parallel}$ parallel und eine Komponente $v_{Q\perp}$ senkrecht zu \vec{QB} , so dass

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{Q\perp} + \vec{v}_{Q\parallel}.$$

Ist α der Winkel zwischen \vec{v}_Q und \vec{QB} , so erhalten wir

$$v_{Q\parallel} = v_Q \cdot \cos \alpha .$$

Da sich die Quelle mit $v_{Q\parallel}$ in Richtung von \vec{QB} dem ruhenden Beobachter nähert, gilt

$$\nu_B = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_{Q\parallel}}{c}} .$$

2.5.5 Optischer Doppler-Effekt

Bezugssysteme und der Michelson-Moreley-Versuch

Im Michelson-Versuch wird ein Lichtstrahl mittels eines halbdurchlässigen Spiegels P in zwei kohärente Strahlen geteilt, gespiegelt und an P abermals geteilt. Sind die beiden Weglängen $\overline{PS_1}$ und $\overline{PS_2}$ gleich, so treffen beide Teilstrahlen im Beobachtungsfernrohr F ohne Phasenunterschied ein und interferieren konstruktiv. Abhängig vom Weglängenunterschied lässt sich auch eine Schwächung des zusammengesetzten Lichtbündels, bis hin zur Dunkelheit erreichen. Ein Laufzeitunterschied der beiden Teilstrahlen wurde auch vermutet, wenn sich die Erde durch den Äther bewegte und somit, an zwei gegenüberliegenden Punkten der Erdbahn, eine relativ hohe Geschwindigkeit mit in Hinblick auf den Äther entgegengesetzter Richtung aufwiese.

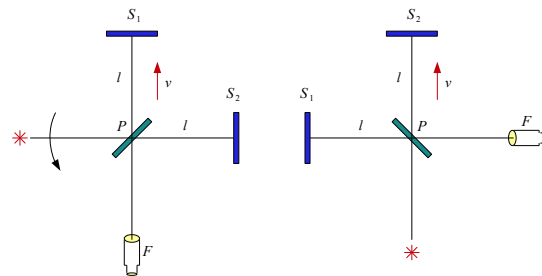


Abbildung 2.32 Michelson-Moreley-Versuch

Der Doppler-Effekt und die Lorentz-Transformation

Bei elektromagnetischen Wellen gibt es eine von der Relativgeschwindigkeit abhängige Frequenzverschiebung.

Dabei wird eine

- Blauverschiebung der Wellen bei relativer Annäherung und
- eine Rotverschiebung bei relativer Entfernung

von Beobachter und Quelle gemessen.

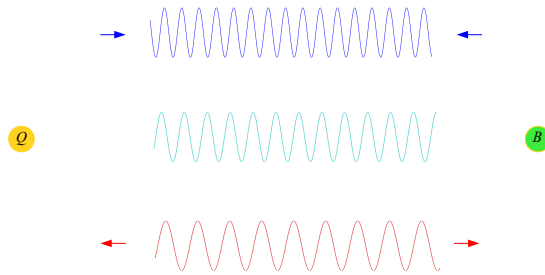


Abbildung 2.33 Optischer Doppler-Effekt

Nun betrachten wir eine Kugelwelle, die von einer punktförmigen Lichtquelle Q emittiert wird.

Die Lichtquelle Q ruhe im Ursprung des Bezugssystems S , der Beobachter ruhe im Bezugssystem S' . Beide Systeme bewegen sich relativ zueinander gleichförmig translatorisch.

Die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S' in x -Richtung betrage u .

Im System S wird eine Kugelwelle durch die Gleichung

$$u(r, t) = \frac{A}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

beschrieben. Dabei ist $\omega = 2\pi\nu$, ν die Frequenz hinsichtlich S und $r = \overline{BQ}$.

Der gegenseitige Abstand Punkte B und Q ist

$$r = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi .$$

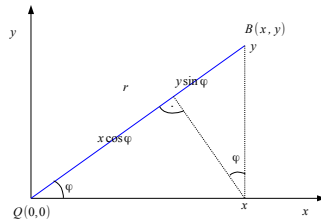


Abbildung 2.34 Doppler-Verschiebung und Koordinaten

Um die Kugelwelle im System S' zu betrachten, transformieren wir

- den Abstand $r = r(x, y, t)$ und
- die Phase

$$\omega \left(t - \frac{x}{c} \cos \varphi - \frac{y}{c} \sin \varphi \right)$$

mit Hilfe der *Lorentz-Transformation*.

Damit erhalten wir

- den Abstand $r' := r(x', y', t')$ und
- die Phase

$$\omega \left(\frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{\cos \varphi}{c} - y' \cdot \frac{\sin \varphi}{c} \right),$$

wobei $\beta := \frac{u}{c}$.

Mit den Bezeichnungen ν' und φ' und folgender Darstellung der Phase

$$2\pi\nu' \left(t' - \frac{x'}{c} \cos \varphi' - \frac{y'}{c} \sin \varphi' \right)$$

erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}\nu' t' &= \nu \left(\frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\cos \varphi}{c} \right), \\ -\nu' \frac{x'}{c} \cos \varphi' &= \nu \left(\frac{\frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\cos \varphi}{c} \right), \\ -\nu' \frac{y'}{c} \sin \varphi' &= -\nu y' \frac{\sin \varphi}{c}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \nu' &= \nu \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \text{(ii)} \quad \cos \varphi' &= \frac{\nu}{\nu'} \frac{\cos \varphi - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \text{(iii)} \quad \sin \varphi' &= \frac{\nu}{\nu'} \sin \varphi.\end{aligned}$$

- Die erste dieser Gleichungen gibt die *Doppler-Verschiebung* an,
- die beiden folgenden Gleichungen zeigen, dass sich die Einfallswinkel in beiden Systemen unterscheiden, d.h. unterschiedliche *Aberrationswinkel* auftreten.

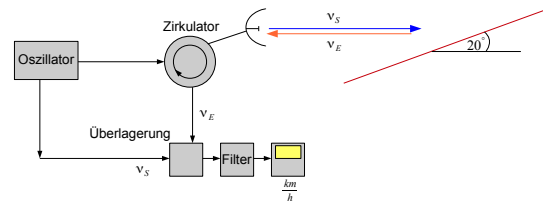
Die Gleichungen gelten auch, wenn wir u durch $-u$, und damit β durch $-\beta$, ersetzen.

Vertauschen wir zusätzlich die Rollen von S und S' , so erhalten wir gemäß Gleichung (i):

$$\text{(iv)} \quad \nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi'}.$$

Dieses Ergebnis ergibt sich auch, wenn wir (ii) in (i) einsetzen. Denn demnach gilt

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu \frac{(1 - \beta^2) - \beta \cos \varphi' \frac{\nu'}{\nu} \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu \sqrt{1 - \beta^2} - \nu' \beta \cos \varphi'.$$

Beispiel: Doppler-Radar**Abbildung 2.35** Doppler-Radar

Sendefrequenz: $\nu_S = 24,125 \text{ GHz}$

Messwinkel: 20° zum Straßenrand

Geschwindigkeit: $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Vom Auto empfangene und reflektierte Frequenz: ν_A

Von der Radarstation empfangene Frequenz: ν_E

(i) Es gilt $\varphi = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$ und

$$\nu_A = \nu_S \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right) = \nu_S \left(1 - \frac{20}{3 \cdot 10^8} \cdot \cos 160^\circ \right) = 1,000\,000\,063 \cdot \nu_S.$$

(ii) Es gilt $\varphi' \approx \varphi = 160^\circ$ und

$$\nu_E = \frac{\nu_A}{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi'} = \frac{\nu_A}{1 + \frac{20}{3 \cdot 10^8} \cos 160^\circ} = 1,000\,000\,063 \cdot \nu_A.$$

Demnach beträgt der Frequenzunterschied

$$\nu_E - \nu_S = \nu_S \cdot (1,000\,000\,063)^2 = 24,125 \text{ GHz} \cdot 0,000\,000\,125 = 3015 \text{ Hz}.$$

(i) longitudinaler Doppler-Effekt

Hier bewegen sich der Beobachter B und die Lichtquelle Q entlang einer Verbindungslinie.

- Ist $\varphi' = 0$, so entfernen sie sich voneinander. Dann gilt

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta}.$$

Entwickeln wir diese Terme bis zur zweiten Ordnung in β , so erhalten wir

$$\nu' \approx \nu \left(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2\right),$$

wenn $\beta \ll 1$.

- Ist $\varphi' = \pi$, so bewegen sie sich aufeinander zu. Dann gilt

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}.$$

Wir erhalten

$$\nu' \approx \nu \left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2\right),$$

wenn $\beta \ll 1$.

(ii) transversaler Doppler-Effekt

Sind Beobachtungsrichtung und Bewegungsrichtung zueinander orthogonal, so erhalten wir, mit $\varphi' = \frac{\pi}{2}$,

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \beta^2} < \nu.$$

In der nichtrelativistischen Mechanik tritt dieser Effekt nicht auf.

Es gilt

$$\nu' \approx \nu \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right),$$

wenn $\beta \ll 1$.

Ferner erhalten wir für φ die Gleichung

$$\cos \varphi = \beta.$$

Setzen wir für v die Bahngeschwindigkeit der Erde relativ zur Sonne, so folgt

$$\beta \approx 10^{-4} \quad \text{und} \quad \varphi' - \varphi \approx 20''.$$

2.6 Übungsaufgaben

Ausbreitung von Wellen

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Wellenträger, auf dem sich Transversalwellen nur in x -Richtung ausbreiten können. Die Ausbreitung der Wellen erfolgt ungedämpft. Vor dem Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Wellenträger in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die sinusförmige Auslenkung im Koordinatenursprung mit Ausbreitung in positiver x -Richtung. Die Amplitude der Auslenkung beträgt $3,0\text{ cm}$. Nach $1,5\text{ s}$ ist die Auslenkung im Ursprung zum ersten Mal maximal. Zu diesem Zeitpunkt beginnt der Wellenträger bei $x = 0,4\text{ m}$ zu schwingen.

- Bestimmen Sie die Wellenlänge, die Schwingungsdauer und die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Welle.
- Bestimmen Sie die Kreisfrequenz und die (Kreis-) Wellenzahl. Geben Sie die Gleichung der beschriebenen Welle an.
- Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Welle bei $x = 3,5\text{ m}$ zum ersten Mal um $1,1\text{ cm}$ ausgelenkt wird.
- Zeichnen Sie das Bild der Welle zum Zeitpunkt $t = 3\text{ s}$ für $0 \leq x \leq \lambda$.

Aufgabe 2

Eine beidseitig eingespannte Geigensaite der Länge $l = 33\text{ cm}$ soll durch Vergleich mit dem Ton einer Stimmgabel mit der Schwingungsfrequenz 440 Hz auf den Kammerton, das eingestrichene a , gestimmt werden. Die Saite hat einen Durchmesser von $0,5\text{ mm}$. Das Material der Saite hat eine Dichte von $7,58\text{ g/cm}^3$. Der Grundton einer Saite entspricht einer Schwingung mit $\lambda = 2l$.

- Mit welcher Spannkraft muss die Saite eingespannt werden, damit der Grundton bei derselben Frequenz wie die Stimmgabel schwingt?
- Die Spannkraft wurde in einem ersten Versuch nicht exakt eingestellt. Daher beobachtet man bei einer Überlagerung der Töne der Saite und der Stimmgabel eine Schwebung mit der Frequenz $\nu = 2\text{ Hz}$. Die Schwebungsfrequenz nimmt zu, wenn die Spannkraft erhöht wird. Mit welcher Frequenz schwingt die Saite?

Aufgabe 3

Auf einem langen Seil wird eine Transversalwelle erzeugt, indem ein Seilende sinusförmig mit der Frequenz 5 Hz und der Amplitude 20 cm hin- und herbewegt wird. Die Spannkraft des Seils beträgt $F = 100 \text{ N}$. Der Seildurchmesser ist $d = 10 \text{ mm}$. Die Dichte beträgt $\rho = 1,5 \text{ kg/dm}^3$.

- a) Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle?
- b) Welche Wellenlänge λ tritt auf?
- c) Wie lautet die Gleichung der Welle, wenn zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ die Auslenkung $u = 0$ und die Geschwindigkeit $v < 0$ ist?

Stehende Wellen

Aufgabe 4

Zur Untersuchung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Seilwelle wird ein Gummischlauch an seinem einen Ende befestigt und am anderen Ende mit einer Frequenz von 4 s^{-1} zu Wellen angeregt. Aus der angeregten und der am festen Ende reflektierten Welle setzt sich eine stehende Welle zusammen, bei der die Entfernung zweier aufeinander folgender Knoten $1,15\text{ m}$ beträgt.

- a) Berechnen Sie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.
- b) Dann wird ein Teil des Gummischlauches mit Sand gefüllt, so dass dort seine längenbezogene Masse viermal so groß ist wie im leeren Teil des Schlauches. Wie groß sind dann die Knotenabstände im gefüllten Teil, wenn sie im leeren die unveränderte Länge $1,15\text{ m}$ haben ?

Aufgabe 5

Eine Saite der Länge $l = 1,0\text{ m}$ ist an beiden Enden eingespannt. Wird eine Saite mit einer Frequenz 600 Hz angeregt, so befinden sich, zusätzlich zu den Endpunkten, drei Knoten entlang der Saite.

- a) Berechnen Sie die Wellenlänge und die Phasengeschwindigkeit der Schwingung.
- b) Bestimmen Sie die Frequenz der Grundschiwingung.

Aufgabe 6

Sie empfangen im Autoradio Wellen eines Senders, der sich genau hinter Ihrem Auto befindet. Vor einer roten Ampel steht ein Lastwagen mit einem großen metallischen Aufbau. Wenn Ihr Fahrzeug an manchen Stellen hinter dem Lastwagen zum Stehen kommt, hören Sie statt der Radiosendung lediglich Rauschen.

- a) Erläutern Sie die Ursache dieses Effekts.
- b) Wie groß ist der minimale Abstand zwischen zwei Rauschmaxima, wenn die Empfangsfrequenz $102,7\text{ MHz}$ beträgt?
- c) Das Rauschen lässt sich mittels „receiver diversity“ verringern. Hierbei wird beispielsweise das von zwei Antennen empfangene Signal genutzt, welches das bessere Signal-Rausch-Verhältnis besitzt. In welchem Abstand in Längsrichtung sollten die Antennen angebracht sein, damit hinter dem Lastwagen ein guter Empfang, unabhängig vom jeweiligen Abstand, erreicht wird?

Aufgabe 7

Ein stabförmiger Quarzkristall mit zwei freien Enden schwingt in longitudinaler Richtung. Die Frequenz der dritten Oberschwingung beträgt $10,6 \text{ MHz}$. Weiterhin gilt:

Elastizitätsmodul $E = 75 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, Dichte $\rho = 2,65 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

- a) Skizzieren Sie die Amplitudenfunktion $A = A(x)$ in Abhängigkeit von der Ortskoordinate x entlang des Stabes für die Grundschwingung und die ersten drei Oberschwingungen zu einem Zeitpunkt maximaler Auslenkung.
- b) Bestimmen Sie die Länge des Quarzstabes.

Aufgabe 8

Im Zeitpunkt $t = 0$ beginnt gleichzeitig in A und B ($\overline{AB} = 70 \text{ cm}$) die Erregung von longitudinalen Kugelwellen. Die von A ausgehende Welle hat die Frequenz $2,5 \text{ Hz}$ und in 1 cm Entfernung von A die Amplitude 5 cm . Die von B ausgehende Welle hat die Frequenz 2 Hz und in 1 cm von B die Amplitude 2 cm . Beide Wellen breiten sich mit der Geschwindigkeit 10 cm/s aus. In welchem Punkt der Verbindungslinie AB haben die Wellen die gleiche Amplitude? Stellen Sie die Funktion für die Zeitabhängigkeit der Gesamtanregung in diesem Punkt auf. Zeigen Sie, dass sie als eine Schwingung mit der Frequenz $2,25 \text{ Hz}$ aufgefaßt werden kann, die mit einer Schwebung der Frequenz $0,5 \text{ Hz}$ überlagert ist.

Beugung und Interferenz

Aufgabe 9

In einem Medium beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen 700 m/s . In welchem Mindestabstand müssen zwei gleichphasige Sender für elastische Wellen mit der Frequenz $7,0 \text{ kHz}$ angebracht werden, damit in großer Entfernung von den Sendern das erste Intensitätsminimum unter einem Winkel von 30° bezogen auf die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie der beiden Sender beobachtet wird?

Aufgabe 10

Eine DVD mit 1350 Linien/mm werde mit Licht der Wellenlänge $632,8 \text{ nm}$ bestrahlt.

- Berechnen Sie die Winkel, unter denen ein Beugungsmaximum zu beobachten ist.
- Unter welchen Winkeln werden die Beugungsmaxima beobachtet, wenn an Stelle der DVD eine CD mit 625 Linien/mm verwendet wird?

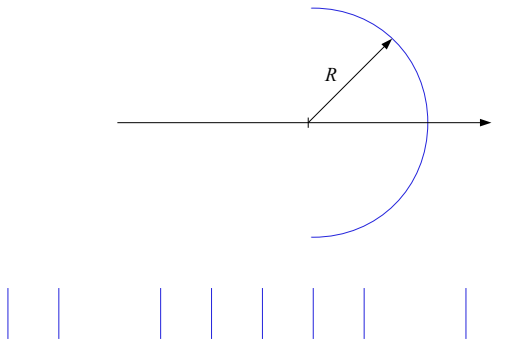
Aufgabe 11

Auf einen Spalt trifft rotes Licht mit einer Wellenlänge von 633 nm und grünes Licht unbekannter Wellenlänge.

- Welche Wellenlänge hat das grüne Licht, wenn das 6te Minimum des grünen Lichtes mit dem 5ten Minimum des roten Lichts zusammenfällt?
- Wie breit muss der Spalt mindestens sein, damit 5 Minima des roten Lichtes zu beobachten sind?

Aufgabe 12

Der Spalt einer Lampe wird durch ein Gitter auf einen Film abgebildet, der auf einem Träger in Form eines Halbkreises mit einem Radius von 120 cm aufgebracht ist. Nach dem Entwickeln sieht das Beugungsbild auf dem ebenen Film wie unten abgebildet aus.

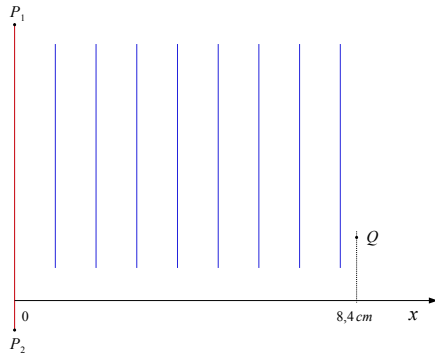


- Ordnen Sie den beobachteten Linien die jeweilige Beugungsordnung zu.
- Erklären Sie die "Lücken".
- Bei einer Wellenlänge von 579 nm beträgt der Abstand zwischen den Beugungsmaxima der 4. Ordnung auf dem Film $1,158\text{ m}$. Bestimmen Sie die Gitterkonstante des Beugungsgitters.
- Berechnen Sie die Breite der Einzelspalte des Beugungsgitters.

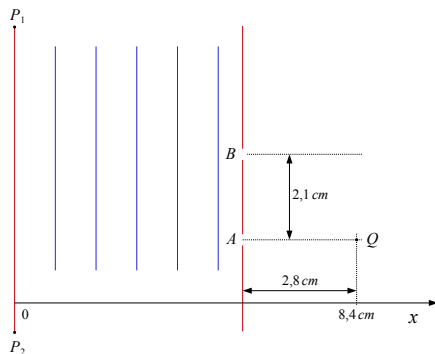
Aufgabe 13

Eine ungedämpfte ebene Wasserwelle mit Frequenz 3 Hz , Wellenlänge $1,4\text{ cm}$, Amplitude $0,4\text{ cm}$ beginnt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Linie P_1P_2 mit $x = 0$ aus in positiver x -Richtung auszubreiten, wobei $u(x = 0, t = 0) = 0$ und $v(x = 0, t = 0) > 0$ gelte.

- a) Nach welcher Zeit hat die Welle ein Wassermolekül an der Stelle $x = 8,4\text{ cm}$ erfasst?



- b) Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung schwingt dieses Molekül nach $2,2\text{ s}$?
- c) Was ändert sich, wenn zwischen Ausgangswellenfront und dem Punkt Q ein Schirm mit der Öffnung A bzw. mit den Öffnungen A und B eingefügt wird?



Dopplereffekt

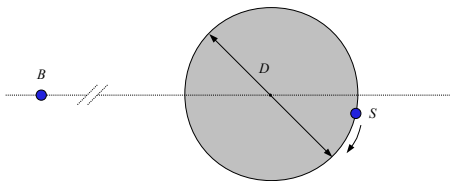
Aufgabe 14

Die Polizei fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h mit Blaulicht und Sirene hinter einem großen LKW, dessen Geschwindigkeit 80 km/h beträgt. Die Sirene erzeugt einen Ton der Frequenz 520 Hz . Die Schallgeschwindigkeit betrage 340 m/s .

- Welche Frequenz hört der LKW-Fahrer?
- Ein Teil der Schallwellen werde an der Rückwand des LKWs zum Polizeifahrzeug reflektiert. Welche Frequenz besitzen diese Schallwellen für das bewegte System des Polizeifahrzeugs? Bestimmen Sie die Schwebungsfrequenz für die ausgesandte und reflektierte Schallwelle.
- Das Polizeifahrzeug kann nicht überholen und muss auf 80 km/h abgebremst werden. Wie groß ist nun die Frequenzverschiebung?

Aufgabe 15

Am Rande einer kreisförmigen Platte mit einem Durchmesser von $1,00 \text{ m}$ ist wie abgebildet ein Schallsender S angebracht, der mit einer Frequenz von $10,00 \text{ kHz}$ sendet.



Die Platte rotiert mit 60 Umdrehungen pro Minute im Uhrzeigersinn. Ein sehr weit entfernter Beobachter B bestimmt die Frequenz des Schalls und erkennt, dass diese zeitlich schwankt. Die Schallgeschwindigkeit betrage $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Erklären Sie die Schwankung der Schallfrequenz stichwortartig.
- Kennzeichnen Sie die Stellen, an denen sich der Sender befindet, wenn
 - der Beobachter die Frequenz $10,00 \text{ kHz}$ misst,
 - der Beobachter die größte Frequenz misst,
 - der Beobachter die kleinste Frequenz misst.
- Berechnen Sie die kleinste und die größte Frequenz, die der Beobachter misst.

Aufgabe 16

Um die Geschwindigkeit einer Rakete zu bestimmen, wird sie von der Startstelle aus mit Radarwellen verfolgt. Sie treffen die Rakete in Flugrichtung und werden von ihr reflektiert. Wird die ausgesandte Welle mit der (empfangenen und geeignet verstärkten) reflektierten Welle im Empfänger überlagert, so entsteht eine im Kopfhörer wahrnehmbare Schwebungsfrequenz. Welche Geschwindigkeit hat die Rakete, wenn die ausgesandte Welle die Frequenz 300 MHz hat und die Schwebungsfrequenz 1500 Hz beträgt?

Aufgabe 17

Ein Beobachter verfolgt den Flug eines sich in konstanter Höhe bewegendem Überschallflugzeugs. Er hört den Knall 25 s nachdem sich das Flugzeug genau über ihm befunden hat. Dabei sieht er das Flugzeug unter dem Winkel 35° über dem Horizont. Die Schallgeschwindigkeit betrage $340\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- a) Mit welcher Geschwindigkeit fliegt das Flugzeug?
- b) In welcher Höhe über dem Beobachter bewegt sich das Flugzeug?

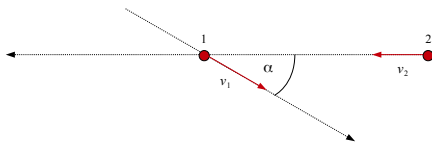
Aufgabe 18

Ein Verkehrsflugzeug überfliegt eine Flugverkehrskontrollstelle in konstanter Höhe h mit konstanter Geschwindigkeit $v = 900\text{ km/h}$. Dort wird die Frequenz des Funksenders an Bord bestimmt, der auf der Frequenz $1143,500\text{ MHz}$ sendet.

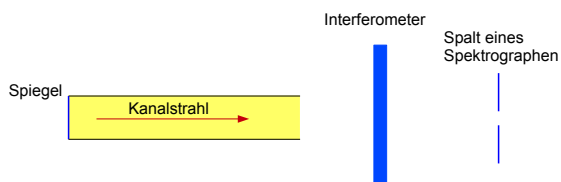
- a) Bestimmen Sie die Frequenzverschiebung im System der Flugverkehrskontrollstelle, wenn sich das Flugzeug genau über dieser befindet.
- b) Bestimmen Sie die Frequenzen im System der Flugverkehrskontrollstelle, wenn die Signale vor und nach dem Überflug aus einem Winkel von 45° gegenüber der Erdoberfläche auftreten.
- c) Wie können Frequenzverschiebungen relativ genau gemessen werden?

Aufgabe 19

Zwei Flugzeuge fliegen wie abgebildet unter einem Winkel von 30° aufeinander zu. Die jeweiligen Geschwindigkeiten betragen $v_1 = 200 \text{ m/s}$ bzw. $v_2 = 150 \text{ m/s}$. Flugzeug 1 sendet ein UKW-Signal bei einer Frequenz von 100 MHz . Wie groß ist die Frequenzverschiebung des Signals, das von Flugzeug 2 empfangen wird?

**Aufgabe 20**

In der abgebildeten Versuchsanordnung dienen als bewegte Lichtquelle sich mit hoher Geschwindigkeit bewegende Atome eines Kanalstrahls.



Deren Licht wird sowohl direkt, durch ein Interferometer, als auch indirekt, über einen Spiegel und durch das Interferometer, auf einen Spalt eines Spektrographen abgebildet. Dabei gelte $\varphi' = \pi$ bei der direkten und $\varphi' = 0$ bei der indirekten Beobachtung. Bei der indirekten Beobachtung wird die Wellenlänge

$$\lambda_{rot} = 4885,18 \text{ \AA},$$

bei der direkten Beobachtung die Wellenlänge

$$\lambda_{blau} = 4836,94 \text{ \AA}$$

gemessen.

- a) Entwickeln Sie die Frequenzen ν' des longitudinalen Dopplereffekts für $\varphi' = 0$ und $\varphi' = \pi$ bis zur 2. Ordnung in β zum Entwicklungspunkt $\beta_0 = 0$.
- b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Atome und die Wellenlänge λ des Emissionsspektrums im Ruhesystem.

2.7 Überblick zu Wellen

Frequenz, Kreisfrequenz, Periodendauer wie bei Schwingungen

Mit Phasengeschwindigkeit c erhalten wir

$$\lambda = cT = c \frac{1}{\nu}.$$

Wellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Phasengeschwindigkeit von Longitudinal- und Transversalwellen einer Saite

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_{\perp} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Ebene harmonische Wellen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \sin\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) = u_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right) \\ &= u_0 \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \end{aligned}$$

Harmonische Kugelwellen

$$u(r, t) = \frac{u_0}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0)$$

Harmonische Kreiswellen für Abstände $r > \lambda$ (näherungsweise)

$$u(r, t) = \frac{u_0}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Schallwellen

Laplace'sche Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

Geschwindigkeitsamplitude oder (Schallschnelle)

$$v_0 := \omega u_0$$

Druck

$$p = p_0 + \Delta p_M \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

mit

$$\Delta p_M := \omega^2 u_0 \rho k^{-1} = \omega u_0 \frac{\omega}{k} \rho = v_0 c \rho .$$

akustischer Widerstand (Schallwiderstand)

$$Z := \frac{\Delta p_M}{v_0} = c \rho$$

Energiedichte und Intensität ebener elastischer harmonischer Wellen

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2$$

$$I = c \overline{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 c = \frac{1}{2} \rho v_0^2 c$$

Intensität

punktförmiger Schallquellen

$$I(r) \sim r^{-2}$$

linienförmigen Schallquellen

$$I(r) \sim r^{-1}$$

Bei inkohärenter Überlagerung gilt

$$I_{ges} = I_1 + I_2$$

bei kohärenter Überlagerung gilt

$$\Delta p_{M,ges} = \Delta p_{M,1} + \Delta p_{M,2}$$

Reflexion von Schallwellen

Transmissionskoeffizient

$$T := \frac{I_{02}}{I_{01}}$$

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Reflexionskoeffizient

$$R := \frac{I'_{01}}{I_{01}}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Interferenz

Interferenz zweier harmonischer Wellen mit

$$u_1(x, t) = u_{0,1} \sin(\omega t - kx + \varphi_1)$$

und

$$u_2(x, t) = u_{0,2} \sin(\omega t - kx + \varphi_2)$$

Gangunterschied der Wellen

$$\Delta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k} = \lambda \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}.$$

- Addition der Amplituden (konstruktive Interferenz) bei

$$\Delta = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Phasendifferenz } 0)$$

- Differenz der Amplituden bei

$$\Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Phasendifferenz } \pi)$$

Für die Interferenz zweier harmonischer Wellen mit

$$u_1(x, t) = u_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

und

$$u_2(x, t) = u_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

gilt

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = A_s(x, t) \cdot \sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t),$$

wobei

$$A_s(x, t) := 2u_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

und

$$\bar{k} := \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

sowie

$$\Delta k := k_1 - k_2, \quad \Delta \omega := \omega_1 - \omega_2.$$

Stehende Wellen

Der Abstand benachbarter Schwingungsbäuche bzw. -knoten beträgt $\frac{\lambda}{2}$.

Eigenfrequenzen

- bei festen Enden

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}$$

- bei freien Enden

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}$$

- bei einem festen und einem freien Ende

$$\nu_n = (2n - 1) \frac{c}{4l},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

Lichtbeugung

Einfachspalt: Minima

$$\sin \vartheta_k = \frac{k\lambda}{b}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beugungsgitter

- Minima (I. Klasse)

$$\sin \vartheta_l = l \cdot \frac{\lambda}{b}, \quad l \in \mathbb{N},$$

- Minima (II. Klasse)

$$\sin \vartheta_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

- Maxima (II. Klasse), (Hauptmaxima)

$$\sin \vartheta_n = n \frac{\lambda}{d}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

falls dort kein Minimum I. Klasse liegt

Lichtbrechung

Brechungsgesetz von Snellius

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Totalreflexion

$$\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1} < 1.$$

Dopplereffekt

• akustischer Dopplereffekt

- Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu, Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c + v_B}{c - v_Q}$$

- Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu, Beobachter entfernt sich von Quelle:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c - v_B}{c - v_Q}$$

- Quelle entfernt sich von Beobachter, Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c + v_B}{c + v_Q}$$

- Quelle entfernt sich von Beobachter, Beobachter entfernt sich von Quelle:

$$\nu_B = \nu_{\tilde{Q}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_{\tilde{B}} \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = \nu_0 \frac{c - v_B}{c + v_Q}$$

Anmerkung: Ist α der Winkel zwischen \vec{v}_Q und \vec{QB} , so gilt

$$v_{Q\parallel} = v_Q \cdot \cos \alpha.$$

• optischer Dopplereffekt

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi'}$$

- longitudinaler Doppler-Effekt (Bewegung entlang der Verbindungslinie)

Falls sich Beobachter und Quelle voneinander entfernen

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta}$$

für $\beta \ll 1$

$$\nu' \approx \nu \left(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Falls sich Beobachter und Quelle annähern

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}.$$

für $\beta \ll 1$

$$\nu' \approx \nu \left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

- transversaler Doppler-Effekt (Beobachtungsrichtung und Bewegungsrichtung sind zueinander orthogonal)

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \beta^2}$$

für $\beta \ll 1$

$$\nu' \approx \nu \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

3 Elektromagnetische Wellen

3.1 Das Spektrum elektromagnetischer Wellen

Zu den elektromagnetischen Wellen gehören beispielsweise Funkwellen, die Infrarot-Strahlung, das sichtbare Licht, die Ultraviolett-Strahlung, die Röntgenstrahlung und die γ -Strahlung.

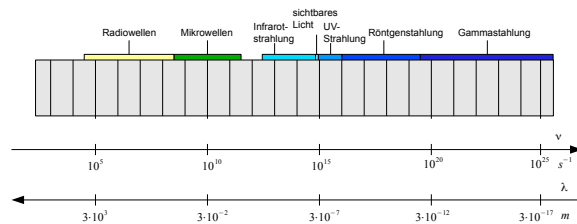


Abbildung 3.1 Das elektromagnetische Spektrum

Für Frequenz und Wellenlänge gilt

$$\lambda \nu = c.$$

Abhängig vom Frequenzbereich gibt es folgende Quellen und Nachweismöglichkeiten:

Funkwellen	elektronische Schaltungen, Antennen
IR, sichtbares Licht	Temperaturstrahlung, Lumineszenz
sichtbares Licht, UV	elektronische Übergänge in Atomen
Röntgenstrahlung	beschleunigte Elektronen
γ -Strahlung	Kernprozesse

3.2 Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwellschen Feldgleichungen bestehen aus den Gesetzen von

- Coulomb

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho ,$$

- Ampère-Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} ,$$

- Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- und dem Gesetz von der Divergenzfreiheit des \vec{B} -Feldes

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 ,$$

Für ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 mit einer endlichen Anzahl von Zusammenhangskomponenten und geeignetem Rand lassen sich diese Gleichungen auch in integraler Form angeben:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{a} = Q ,$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{a} + I ,$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{a} ,$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{a} = 0 .$$

Der Verschiebungsstrom

Maxwell ergänzte Ampères Gesetz um den Verschiebungsstrom. Die Verschiebungsstromdichte beträgt

$$j_v = \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Damit wurde die Ampèresche Gleichung

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

mit der Leitungsstromdichte \vec{j} um die Verschiebungsstromdichte ergänzt. Diese Gleichung lautet

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_v + \vec{j}.$$

Betrachten wir Lade- und Entladevorgänge eines Kondensators, so zeigt sich, dass Maxwells Verschiebungsstrom

- durch eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes bewirkt
- und, ebenso wie ein Leitungsstrom, Ursache eines Magnetfeldes ist.

Die Maxwellschen Gleichungen zeigen, dass

- ein zeitlich variierendes elektrisches Feld ein magnetisches Wirbelfeld erzeugt und
- ein zeitlich variierendes Magnetfeld ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt.

3.3 Elektromagnetische Wellen

Setzen wir voraus, dass $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ und ϵ und μ räumlich konstant sind, so nehmen die Maxwell Gleichungen folgende Gestalt an

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0.$$

Zusätzlich gilt in linearen, isotropen Medien

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

und

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

Sind \vec{E} und \vec{B} hinreichend differenzierbar, so können wir den *div*-Operator auf die beiden "rot-Gleichungen" anwenden und die Eigenschaft

$$\Delta \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}$$

nutzen. Damit erhalten wir die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{E} - c^{-2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

und

$$\Delta \vec{B} - c^{-2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0,$$

wobei

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist.

Nehmen wir an, dass das Gebiet, in dem sich die elektromagnetische Welle ausbreitet, in jeder Richtung unbegrenzt ist, so können wir von Randwerten an die Felder absehen.

Lassen wir auch Anfangswerte außer Acht, so erhalten wir als Lösungen des Problems die harmonischen Wellenfunktionen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

und

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Dabei ist \vec{k} der Wellenzahlvektor mit

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und \vec{k} weist in Richtung der Wellenausbreitung.

Betrachten wir die Felder komponentenweise, so können wir die Ausbreitung einer ebenen linear polarisierten Welle und die zugehörige Oszillation der Felder folgendermaßen darstellen:

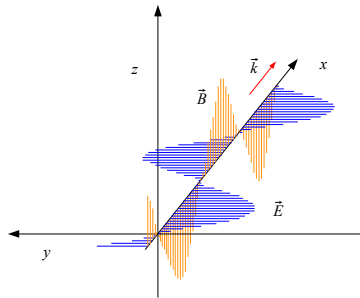


Abbildung 3.2 Linear polarisierte elektromagnetische Welle

Die ebene harmonische elektromagnetische Welle soll sich in x -Richtung ausbreiten und das elektrische Feld die Form

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx) = \vec{E}_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c}))$$

besitzen.

Die Änderung des elektrischen Feldes verursacht ein Magnetfeld B , das sich ebenfalls harmonisch in Abhängigkeit von $t - \frac{x}{c}$ ändert.

Die Änderung dieses Magnetfeldes ruft wiederum ein elektrisches Feld hervor.

Nach den Maxwellschen Gleichungen zeigt sich:

- Elektromagnetische Wellen sind transversal, da im ladungsfreien Raum keine Feldquellen oder -senken existieren.
- Die Felder \vec{E} und \vec{B} sind zueinander orthogonal, da der Verschiebungsstrom maximal in einem geeignet gewählten Stromkreis ist, wenn dieser senkrecht zu \vec{E} steht und dann, wegen

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{a},$$

auch H maximal sein muss.

- \vec{E} und \vec{H} sind in Phase, da der Verschiebungsstrom maximal in einem geeignet gewählten Stromkreis ist, wenn er von einem Maximum von \vec{E} bis zum nächsten Minimum von \vec{E} reicht.

- Zwischen den Amplituden des \vec{E} -Feldes und des \vec{H} -Feldes besteht folgender Zusammenhang:

$$H_0 = \epsilon \epsilon_0 c E_0$$

und

$$E_0 = \mu \mu_0 c H_0 .$$

Im Vakuum breiten sich elektromagnetische Wellen mit der Geschwindigkeit

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

aus.

In Materie beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}} .$$

Im Falle von $\mu = 1$ erhalten wir die *Maxwell-Relation*

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon} .$$

Während sich bei linear polarisierten elektromagnetischen Wellen die Schwingungsrichtung von \vec{E} und \vec{B} nicht verändert, dreht sich die jeweilige Schwingungsrichtung bei elliptisch und zirkular polarisierten Wellen.

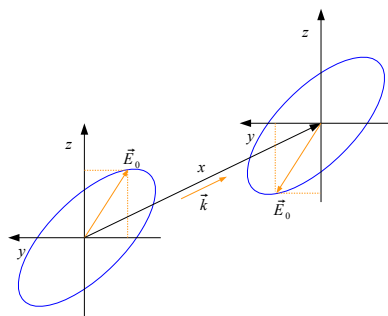


Abbildung 3.3 \vec{E}_0 für eine elliptisch polarisierte Welle

In *natürlichem Licht*, wie es beispielsweise ein glühender Körper aussendet,

- sind die verschiedenen Polarisationsrichtungen regellos vertreten und das Licht wird als *unpolarisiert* bezeichnet,
- sind die Wellenzüge *nicht kohärent* und das Licht enthält viele regellos und rasch aufeinanderfolgende Wellengruppen, da an der Emission eine große Zahl von Atomen beteiligt ist und die Emissionsdauer sehr kurz ist.

Zwei ebene harmonische elektromagnetische Wellen gleicher linearer Polarisierung, gleicher Frequenz und gleicher Wellenlänge werden als *kohärent* bezeichnet, wenn die Differenz ihrer Nullphasen konstant ist.

Die *Kohärenzlänge* eines Wellenzuges ist durch die Länge des Wellenzuges begrenzt. Zumal die mittlere Dauer der Lichtemission bei isolierten Atomen im Bereich $10^{-8}s$ liegt, beträgt die Kohärenzlänge des natürlichen Lichts wenige Meter.

3.4 Energiedichte und Energiestrom

Mit Hilfe des Ampère-Maxwell-Gesetzes lässt sich folgende Kontinuitätsgleichung für die Energie herleiten:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Dabei wird

- die Energiedichte des Elektromagnetischen Feldes definiert durch

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

- der *Poynting-Vektor* definiert durch

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- und das Gebietsintegral von $\vec{j} \cdot \vec{E}$ als mechanische Leistung verstanden.

Eine ebene, ungedämpfte Welle hat die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}(ED + HB) = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2$$

und die Energiestromdichte

$$S = |\vec{S}| = EH = cw.$$

Die Intensität I ist der Zeitmittelwert von S , d.h.

$$I = c\bar{w} = c \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{2} c \epsilon\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \mu\mu_0 H_0^2.$$

3.5 Der lineare Oszillator

Der Hertz'sche Oszillator

Denken wir uns einen Schwingkreis, dessen Kapazität und Induktivität durch einen linienförmigen Leitungsdraht gegeben sind, so erhalten wir einen linearen oder Hertz'schen Oszillator. Der umgebende Raum soll ein Vakuum sein.

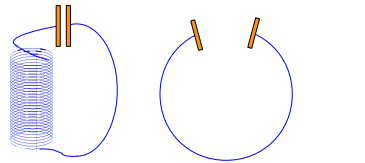


Abbildung 3.4 Schwingkreis und Hertz'scher Oszillator

Strom- und Spannungsverteilung oszillieren, wobei der Phasenabstand beider Schwingungen, bei rein induktivem Widerstand, $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

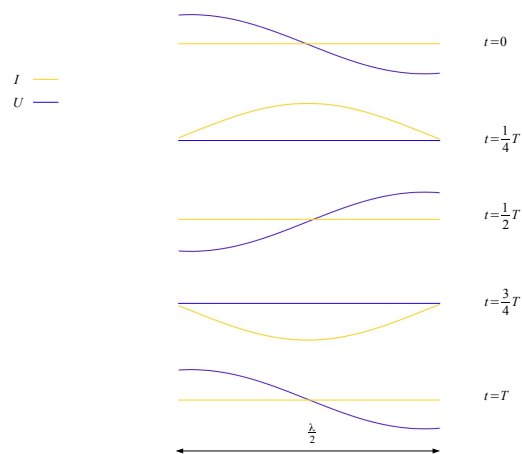


Abbildung 3.5 Stromstärke und Spannung des Hertz'schen Oszillators

Im linearen Oszillator bildet sich eine stehende Welle des elektrischen Feldes, deren Wellenlänge doppelt so lang wie der Stab ist.

Diese lässt sich als Überlagerung zweier Wellen gleicher Amplitude und der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ als Phasengeschwindigkeit verstehen.

Die Schwingungsfrequenz des linearen Oszillators der Länge l beträgt

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}.$$

Elektrisches und magnetisches Feld eines Hertzschen Oszillators oszillieren und breiten sich mit der Geschwindigkeit c im Raum aus.

Die Feldlinien lösen sich folgendermaßen vom Hertzschen Dipol:

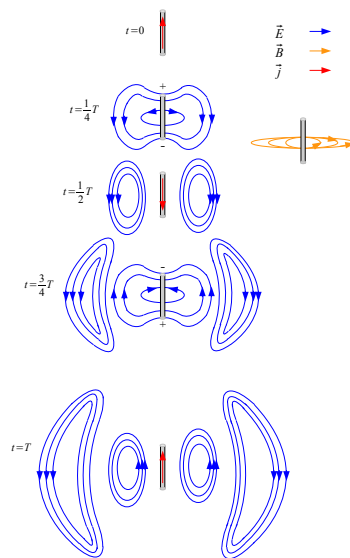


Abbildung 3.6 Das elektrische und magnetische Feld eines Hertzschen Oszillators

Da im Oszillator

- das maximale Magnetfeld bei maximalem Strom auftritt und
- diese hier um $\frac{\pi}{2}$ gegen die Zeitpunkte maximalen elektrischen Feldes (oder elektrischen Dipolmomentes) verschoben auftreten,

sind, im Nahbereich des Oszillators, beide Felder räumlich getrennt.

In Abständen vom Oszillator, die groß im Vergleich zu λ sind,

- oszillieren elektrisches und magnetisches Feld hingegen in Phase,
- sind zueinander orthogonal und
- bilden eine ebene elektromagnetische Welle.

Die Abstrahlcharakteristik eines Hertzschen Dipols, gegeben durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H},$$

ist in folgender Abbildung dargestellt:

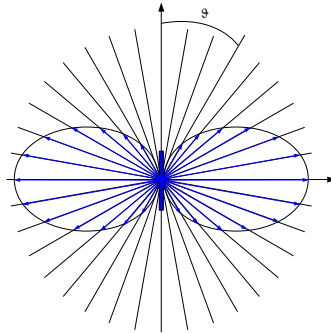


Abbildung 3.7 Das Strahlungsdiagramm des Hertzschen Oszillators

Der Poynting-Vektor \vec{S} weist hier radial nach außen.

Die Größe $S = |\vec{S}|$ ist die Energiestromdichte. Es zeigt sich, dass sich S

- zum Abstand r vom Dipolmittelpunkt gemäß

$$S \sim r^{-2}$$

- zum Winkel ϑ gemäß

$$S \sim \sin^2 \vartheta$$

- und zur Kreisfrequenz ω des Oszillators gemäß

$$S \sim \omega^4$$

verhält.

Eine genaue Rechnung zeigt, dass

$$S = \frac{p^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2},$$

wobei das elektrische Dipolmoment $p = e l$ ist.

Der Wirkungsgrad η eines Hertzschen Dipols zeigt folgendes Verhalten:

$$\eta \sim \lambda^{-3},$$

da für die Joule-Leistung P

$$P \sim \omega$$

gilt.

Das genaue Resultat lautet

$$\eta = 8 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^3,$$

wobei h die Antennenhöhe bezeichnet und $h \leq \frac{\lambda}{2}$ vorausgesetzt sei.

Würde eine Rundfunksendung beispielsweise mit 200 Hz , statt moduliert mit einer Trägerwelle einer Frequenz über 100 kHz , gesendet, so wäre eine Übertragung bei üblichen Entfernungen und Leistungsdaten nicht möglich.

Da wir auch die Luftmoleküle als Hertzsche Oszillatoren auffassen können, zeigt das Verhalten

$$S \sim \omega^4,$$

zusammen mit weiteren Überlegungen, dass das Streulicht wesentlich mehr Blau als Rot enthält und der Tageshimmel blau ist. Wesentlich hierbei ist auch, dass die Moleküle der Atmosphäre nicht wie ein Gitter mit Molekülen im Abstand $\lambda/2$ angeordnet sind. Ferner betrachten wir das Sonnenlicht als Überlagerung zweier linear polarisierter elektromagnetischer Wellen, wobei die eine in der Ebene mit den Punkten S , O und B schwingt und die zweite senkrecht hierzu. Die Schwingungsrichtung der Dipole ist in folgender Abbildung eingezeichnet.

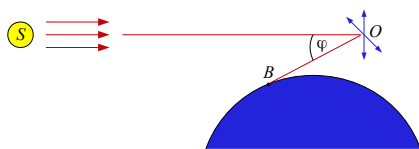


Abbildung 3.8 Das Blau des Tageshimmels als Streulicht

Das Streulicht wird demnach eine Abstrahlcharakteristik gemäß

$$S \sim \frac{1 + \cos^2 \varphi}{r^2} \omega^4$$

aufweisen.

3.6 Wechselwirkung elektromagnetischer Wellen mit Materie

3.6.1 Die Quantenzahlen von Elektronen der Atomhülle

Die Zustand eines Hüllenelektrons wird charakterisiert durch folgende Quantenzahlen:

Hauptquantenzahl n	$n = 1, 2, \dots$ (K -, L -, ... Schale)
Neben- oder Drehimpulsquantenzahl l	$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ (s -, p -, d -, f -Elektronen)
magnetische Quantenzahl m	$m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$
Spinquantenzahl s	$s \pm \frac{1}{2}$

Die Elektronen werden beispielsweise beschrieben anhand der Lösungen ψ der Schrödingergleichung. Mittels ψ lässt sich deren Wahrscheinlichkeitsdichte bestimmen.

Doch bereits mit Hilfe von Niels Bohrs Atommodell (1913) ließ sich das H -Linienspektrum erklären.

Bohr ging davon aus, dass

- stationäre Energiezustände mit Energiewerten W_k existieren, in denen das Atom nicht strahlt,
- Strahlung nur beim Übergang zwischen zwei Energiezuständen auftritt und diese die Energie

$$h\nu = W_k - W_l, \text{ wobei } h : \text{Plancksches Wirkungsquantum,}$$

besitzt und

- für den Drehimpuls L der Elektronen die Bedingung

$$L = n \frac{h}{2\pi}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N},$$

gilt.

Bohr interpretierte die Elektronenzustände als Bewegungen der Elektronen auf Kreisbahnen.

Nach Bohr beträgt die Gesamtenergie des Elektrons der Masse m auf der Bahn n

$$W_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

und die Frequenz ν der, beim Übergang von Bahn n_2 zu Bahn n_1 emittierten Strahlung

$$\nu = \frac{W_{n_2} - W_{n_1}}{h} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Der Aufbau der Elektronenhülle genügt

- dem Pauli-Prinzip, das besagt, dass sich zwei Elektronen eines Atoms in zumindest einer Quantenzahl unterscheiden müssen und
- der Regel, dass von zwei möglichen Zuständen der energetisch günstigere angenommen wird.

3.6.2 Das Photon

Einstein konnte 1905 durch seine Deutung des äußeren Photoeffekts die Beobachtung von W. Hallwachs (1888), dass

- die Energie der aus einer negativ geladenen Metallplatte austretenden Elektronen nur von der Frequenz des Lichtes und
- ihre Anzahl nur von der Intensität des Lichtes abhängt,

erklären.

Ist die Wellenlänge des Lichts hinreichend klein, so treten aus einer Metalloberfläche Elektronen aus.

Deren kinetische Energie W lässt sich beispielsweise durch eine Gegenspannung messen.

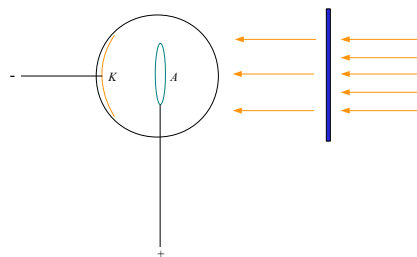


Abbildung 3.9 Photozelle zur Messung der Lichtintensität

Die Einstein-Gleichung

$$W = h\nu - W_0$$

zeigt, dass die kinetische Energie der Elektronen mit der Frequenz des Lichtes zunimmt. W_0 ist die Arbeit, die für die Lösung der Elektronen von der Metalloberfläche notwendig ist.

Nach der Hypothese, dass Lichts eine elektromagnetische Welle ist, würde sich die Energie mit der Lichtintensität erhöhen.

Nach der Planckschen Hypothese hingegen, besteht Licht der Frequenz ν aus Photonen der Energie $h\nu$.

3.6.3 Die Hohlraumstrahlung und das Plancksche Strahlungsgesetz

Der *Absorptionsgrad* α ist definiert als Verhältnis der absorbierten zur auftreffenden Strahlungsleistung, der *Reflexionsgrad* ρ als das Verhältnis der reflektierten zur auftreffenden Strahlungsleistung und der *Transmissionsgrad* τ als das Verhältnis der transmittierten zur auftreffenden Strahlungsleistung. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt daher

$$\alpha(\nu) + \rho(\nu) + \tau(\nu) = 1.$$

Das Lambert-Gesetz

Die Strahlungsdichte B vollkommen rauher, diffus reflektierender Flächen oder die schwarzer Körper ist unabhängig vom Winkel ϑ zwischen Flächennormalen und Beobachtungsrichtung. Da die Strahlungsdichte durch

$$B := \frac{J}{A \cos \vartheta},$$

mit der Strahlungsstärke J

$$J := \frac{\phi}{\Omega},$$

dem Strahlungsfluss, d. h. der Strahlungsleistung ϕ , dem Raumwinkel Ω und dem Flächenelement A der abstrahlenden Fläche definiert ist, gilt hier

$$J(\vartheta) = B_0 A \cos \vartheta,$$

wobei B_0 unabhängig von ϑ ist. Dieses Proportionalität zu $\cos \vartheta$ formulierte Lambert im Jahre 1760 und wird daher als *Lambertsche Cosinusgesetz* bezeichnet.

Das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz

Das Verhältnis der Strahlungsdichte B zum Absorptionsgrad α eines beliebigen Temperaturstrahlers ist gleich der Strahlungsdichte B_s eines schwarzen Körpers der gleichen Temperatur.

Bei fester Frequenz und Temperatur ist der spektrale Emissionsgrad $\epsilon(\nu, T)$ eines beliebigen Körpers gleich seinem spektralen Absorptionsgrad $\alpha(\nu, T)$ und es gilt für die spektrale Strahlungsdichte

$$B(\nu, T) = \epsilon(\nu, T) B_s(\nu, T)$$

sowie

$$B(\nu, T) = \alpha(\nu, T) B_s(\nu, T) .$$

Das Plancksche Strahlungsgesetz

Um die empirischen Ergebnisse zur Energieverteilung der schwarzen Strahlung zu erklären, stellte Max Planck 1900 eine der klassischen Physik widersprechende Annahme vor. Diese Hypothese besagt, dass

ein strahlendes System Energie nicht kontinuierlich an ein Strahlungsfeld abgeben kann, sondern nur in ganzzahligen Vielfachen des Energiequantums $h\nu$.

Nach Planck genügt die *spektrale Energiedichte* $\rho(\nu, T) = \rho_s(\nu, T)$ der Hohlraumstrahlung, im thermischen Gleichgewicht und für feste Polarisationsrichtung, dem Gesetz

$$\rho(\nu, T) = \frac{4\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} .$$

In folgender Abbildung ist ρ als Funktion $\rho = \rho(\nu)$, parametrisiert für T , dargestellt:

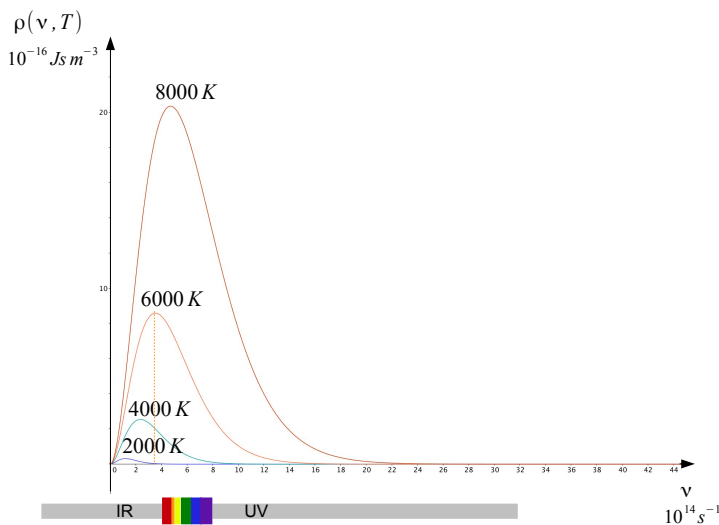


Abbildung 3.10 Die spektrale Energiedichte $\rho(\nu, T)$

Einsteins Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes

Werden Atome durch die Absorption der Energie $h\nu$ angeregt, so ist das Verhältnis der Teilchenzahldichte n_0 der nicht-angeregten Atome zu der Teilchenzahldichte n^* der angeregten Atome im thermischen Gleichgewicht durch die Boltzmann-Verteilung

$$\frac{n^*}{n_0} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

bestimmt.

Neben den beiden bekannten Prozessen, der *Absorption* und der *spontanen Emission*, stellt Einstein einen weiteren Prozess vor, der als *erzwungene* oder *stimulierte Emission* bezeichnet wird, und als ein zur Absorption inverser Vorgang betrachtet werden kann.

Im Gleichgewicht ist die Häufigkeit der Absorptionen von Photonen der Energie $h\nu$ gleich der Häufigkeit der entsprechenden Emissionen.

Folgende Prozesse tragen dabei zum Energieaustausch zwischen Atomen und Photonen bei:

- *Absorptionen*, wobei deren Häufigkeit proportional zu n_0 und $\rho(\nu, T)$ ist,
- *spontane Emissionen*, wobei deren Häufigkeit proportional zu n^* ist,
- *stimulierte Emissionen*, wobei deren Häufigkeit proportional zu n^* und $\rho(\nu, T)$ ist.

Wechselwirkungen mit elektromagnetischen Wellen der Energie $h\nu$ können auftreten, wenn die Energie gleich der Differenz im Energieniveau ΔE zu einem freien Quantenzustand ist.

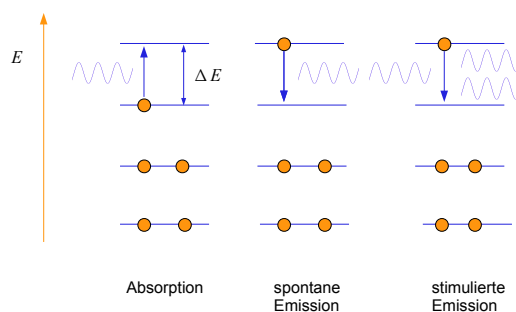


Abbildung 3.11 Wechselwirkungen mit dem Strahlungsfeld

Anmerkung

Der Prozess der *erzwungenen Emission* ist notwendig für die Wirkungsweise des Lasers (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) und Masers (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Zusätzlich muss, bei zwei Niveaus, der angeregte Zustand stärker besetzt sein als der Grundzustand.

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die spezifische Ausstrahlung R , definiert durch

$$\frac{\phi}{A},$$

lässt sich (nach Berücksichtigung beider Polarisationsrichtungen und Mittelung über den Winkel ϑ zwischen Einfallsrichtung und Polarisationsrichtung) durch

$$R = \frac{c}{2} \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu$$

bestimmen. Somit folgt

$$\begin{aligned} R &= \frac{c}{2} \int_0^{\infty} \frac{4\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{2\pi}{c^2} \frac{k^4 T^4}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} T^4. \end{aligned}$$

3.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Außerhalb der Erdatmosphäre wird eine Sonnenintensität von $1,36 \text{ kW/m}^2$ und ein Maximum der spektralen Energiestromdichte bei einer Frequenz von $3,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ gemessen. Die mittlere Entfernung der Erde von Sonne beträgt $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

- Berechnen Sie die Temperatur auf der Sonnenoberfläche und die Strahlungsleistung der Sonne – unter der Annahme, dass die Sonne isotrop in alle Richtungen abstrahlt und der Emissionsgrad 1 beträgt.
- Bestimmen Sie den Sonnenradius und vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert von $6,964 \cdot 10^8 \text{ m}$.
- Berechnen Sie die Gesamtleistung der Sonnenstrahlung, die die Erdoberfläche trifft. Nehmen Sie dabei an, dass die Sonne eine kreisförmige Scheibe mit dem Erdradius von 6370 km gleichmäßig bestrahlt und ca. 30% der Sonnenstrahlung durch Rückstreuung im Bereich der Atmosphäre und Reflexion an den Wolken verloren gehen.
- Nehmen Sie an, dass thermisches Gleichgewicht vorliegt, die Temperaturverteilung auf der Erde konstant ist, die Temperatur des umgebenden Weltalls 0 K beträgt und der Emissionsgrad im infraroten Wellenlängenbereich gleich 0,96 ist. Welche Temperatur würde sich dann auf der Erde einstellen?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Erde über die gesamte Kugeloberfläche Energie abstrahlt.

Aufgabe 2

Die Glühwendel einer Glühbirne besitzt einen Emissionsgrad von 0,35 und eine Oberfläche von $0,72 \text{ cm}^2$. Sie erzeugt eine kugelsymmetrische Strahlung, die in $1,0 \text{ m}$ Entfernung eine Intensität von $8,0 \text{ W/m}^2$ aufweist.

- Welche Strahlungsleistung erzeugt diese Glühbirne?
- Welche Temperatur hat die Wendel?
- Bei welcher Temperatur liegt das Maximum der emittierten Strahlung?

Aufgabe 3

- Leiten Sie aus dem Planckschen Strahlungsgesetz den Wert ν_m her, an dem das Maximum der Strahlungsdichte $\rho(., T)$ eines Hohlraumstrahlers liegt und bestimmen Sie den Wert der maximalen Strahlungsdichte $\rho(\nu_m, T)$.
- Für die Sonne gilt $\nu_m = 3,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Bestimmen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne.

Aufgabe 4

Ein Hertzscher Oszillator sende, nach einer zusätzlichen Amplitudenmodulation, ein Signal der Form

$$U(t) = U_0(1 + m \sin(2\pi\nu \cdot t + \varphi)) \cos(2\pi\nu_0)$$

mit $\nu = 200 \text{ Hz}$ und der Frequenz $\nu_0 = 600 \text{ kHz}$ der Trägerwelle. Der Wirkungsgrad

$$\eta = 8\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3$$

für die Abstrahlung der Trägerwelle sei 10%.

- Bestimmen Sie die Antennenhöhe h .
- Welchen Wirkungsgrad hätte der Sender, wenn das Signal

$$U(t) = U_0(1 + m \sin(2\pi\nu \cdot t + \varphi))$$

übertragen würde?

- Vergleichen Sie die radiale Abhängigkeit der Feldstärke $E = E(r)$ des Fernfeldes mit der eines statischen Dipols.

Aufgabe 5

Die beobachteten Wellenlängen λ des Balmer-Spektrums des Wasserstoffatoms lassen sich sehr gut mittels

$$\lambda^{-1} = \text{const.} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad \text{mit } n_2 = 3, 4, 5, \dots,$$

bestimmen.

- Geben Sie den Zusammenhang zwischen beobachteten Frequenzen und den Energieniveaus des Bohrschen Atommodells an und geben Sie den Wert obiger Konstanten an.
- Bestimmen Sie die Wellenlänge jener Balmer-Spektrallinie, welche die niedrigste Energie aufweist.

4 Elektrische Leitfähigkeit von Festkörpern

4.1 Elektrische Leitfähigkeit von Metallen

Typische physikalische Eigenschaften von Metallen

- hohe elektrische Leitfähigkeit
- hohe thermische Leitfähigkeit
- Undurchsichtigkeit, Reflexion und Glanz
- gute Verformbarkeit
- Legierbarkeit

Beispiele: Na, Cu, Au, Ag, Ni, Fe, Al

Metalle sind dadurch gekennzeichnet, dass sie leicht Elektronen abgeben. Die Ionisierungsenergie ihrer Valenzelektronen ist gering.

Die hohe elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit, Undurchsichtigkeit, Reflexion und der metallische Glanz werden durch die geringe Ionisierungsenergie der Valenzelektronen verursacht.

4.1.1 Elektrische Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit

Das Ohmsche Gesetz

Bei vielen wichtigen Leitern sind Strom und Spannung proportional.

Der Proportionalitätsfaktor heißt *Leitwert*, dessen Kehrwert heißt *Widerstand* R :

$$R = \frac{U}{I}$$

Bei einem homogenen Ohmschen Widerstand ist der Widerstandswert R proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zum Querschnitt A des Leiters:

$$R = \frac{\rho l}{A}.$$

ρ heißt *spezifischer Widerstand*. Dessen Kehrwert

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

wird *elektrische Leitfähigkeit* genannt.

Das Gesetz von Wiedemann-Franz

Nach dem Gesetz von Wiedemann-Franz gilt für das Verhältnis von Wärmeleitfähigkeit λ und elektrischer Leitfähigkeit σ

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{3k^2}{e^2}.$$

Dabei ist k die Boltzmann-Konstante.

Elektrische Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit von Metallen beruhen auf dem gleichen Mechanismus, nämlich der Beweglichkeit der freien Leitungselektronen.

4.1.2 Die Drude-Lorentz-Theorie

P. Drude und *H.A. Lorentz* nahmen an, dass die Valenzelektronen im Kristallverband des Metalls nicht mehr bestimmten Atomen angehören, sondern sich als Gas freier Elektronen durch das Gitter der Ionen bewegen.

Die Theorie erklärt vieles gut, bietet aber nur eine unvollkommene Beschreibung.

- So kann das Ohm- und das Wiedemann-Franz-Gesetz mit der Theorie gedeutet werden.
- Allerdings müsste ein freies Elektronengas eine kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT$$

haben, was aber nicht mit den Messungen übereinstimmt.

4.2 Energiebänder

Elektronen sind Fermionen, die in einem Kristall einer deutlichen Impulsunschärfe unterliegen. Das führt zum Auftreten von Energiebändern.

Dabei besteht eine Wechselwirkung zwischen Elektronen und Ionengitter. Das verursacht eine Aufspaltung der Energieniveaus in Energiebänder.

Die Besetzung der Energieniveaus in den Bändern mit Elektronen erfolgt so, dass die Gesamtenergie minimal ist.

Das höchste vollbesetzte Band heißt *Valenzband*. Elektrische Leitfähigkeit erfordert bewegliche Ladungsträger. Daher müssen Elektronen ein unbesetztes und erreichbares Energieniveau finden.

In voll besetzten Energiebändern ist hingegen kein Ladungstransport möglich.

Auf das Valenzband folgt ein nicht vollbesetztes Band, das *Leitungsband*.

Dazwischen kann eine verbotene Zone, eine sogenannte Energielücke sein, in der keine Energieniveaus für Elektronen existieren.

Die Anzahl der zur Verfügung stehenden frei beweglichen Ladungsträger ist abhängig von der Temperatur.

Die *Beweglichkeit* hängt ab von

- Gitterschwingungen
- Störungen im Gitteraufbau
- Wechselwirkung der Ladungsträger

Metalle sind durch ein teilweise gefülltes Leitungsband und eine hohe Konzentration frei beweglicher Ladungsträger gekennzeichnet.

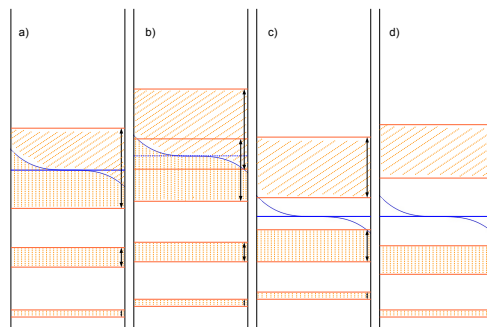


Abbildung 4.1 Bänderschemata

- a) Metall mit einem Valenzelektron (Alkalimetalle)
- b) Metall mit zwei Valenzelektronen (Erdalkalimetalle)
- c) Halbleiter
- d) Isolator

4.3 Halbleiter

Halbleiter besitzen ein voll besetztes Valenzband und, bei tiefen Temperaturen, ein leeres Leitungsband. Dazwischen liegt die Energielücke.

Bei tiefen Temperaturen sind Halbleiter Isolatoren.

Bei hoher Temperatur können die Valenzelektronen durch die thermische Energie die Energielücke überwinden.

Beispiele: Si, Ge, ZnS, GaAs, SiC, Cu₂O

4.3.1 Eigenleitung

Es befinden sich frei bewegliche Elektronen im Leitungsband und daher frei bewegliche Elektronenlücken im Valenzband.

Die Elektronenkonzentration n beträgt

$$n = n(T) = n_0 e^{-\frac{W_G - \mu}{kT}}.$$

Dabei ist

$$n_0 = n_0(T) \sim T^{\frac{3}{2}},$$

T : absolute Temperatur

μ : chemisches Potential, Fermigrenze

k : Boltzmannkonstante

W_G : Energieunterschied (Bandabstand) zwischen Leitungs- und Valenzband.

Elektronen können thermisch, durch Phonon-Elektron-Wechselwirkung, oder optisch, durch Photon-Elektron-Wechselwirkung (manchmal unter Beteiligung von Phononen), angeregt werden und das Leitungsband erreichen.

4.3.2 Störstellenleitung

Werden Fremdatome aus einer Nachbargruppe des Periodensystems in das Kristallgitter eingebaut, so können sich Energieniveaus, die in der verbotenen Zone nahe am Leitungs- bzw. nahe am Valenzband liegen, ergeben.

Weitere Störungen des Idealgitters ergeben sich durch

- nichtstöchiometrische Zusammensetzungen
- unbesetzte Gitterplätze

- Zwischengitterteilchen und Versetzungen
- Kristallgrenzen
- Abweichungen von der Kristallordnung (bis zum amorphen Zustand)

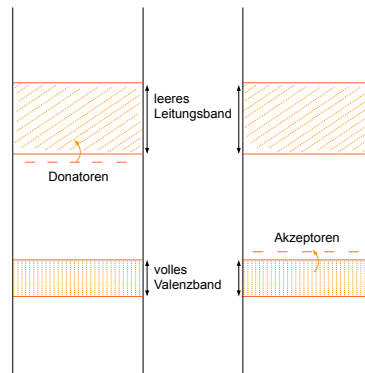


Abbildung 4.2 Bänderschemata von Halbleitern mit Donator- und Akzeptorniveaus

Donatoren

Fremdatome mit Elektronenüberschuss in Hinblick auf das Wirtsatom. Sie haben Energieniveaus nahe dem Leitungsband. Daher können Elektronen leicht in das Leitungsband übergehen.

Akzeptoren

Fremdatome mit Elektronenmangel. Sie haben Energieniveaus nahe dem Valenzband. Daher können Elektronen leicht aus dem Valenzband eingefangen werden.

Die Temperaturabhängigkeit des Halbleiterwiderstandes wird durch

- die Ladungsträgerkonzentration
- die Beweglichkeit der Ladungsträger

bestimmt.

Die Beweglichkeit wird oft durch die Gitterschwingungen beschränkt. Bei Halbleitern weisen diese eine sehr viel geringere Temperaturabhängigkeit als die Ladungsträgerkonzentration auf.

Halbleiter mit Donatoren weisen einen Elektronenüberschuss auf, Halbleiter mit Akzeptoren einen Elektronenmangel. Bei hinreichender Störstellendotierung wird die elektrische Leitfähigkeit des gestörten Halbleiters, bei Donator-Dotierung, durch Elektronen oder, bei Akzeptor-Dotierung, durch Löcher bestimmt. Die jeweilige elektrische Leitung wird als *n*-Leitung oder *p*-Leitung bezeichnet.

Notation und Konstanten

k : Boltzmann-Konstante, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$

h : Plancksche Konstante $h = (6,62620 \pm 5) \cdot 10^{-34} Js$

E : elektrische Feldstärke

D : Verschiebungsdichte

H : magnetische Feldstärke

B : magnetische Flussdichte

ϵ : Dielektrizitätskonstante

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante; $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} CV^{-1}m^{-1}$

μ : Permeabilität

μ_0 : magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante; $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} VsA^{-1}m^{-1}$

Literatur

- [1] L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III Optik*, W. de Gruyter
- [2] M. Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins*, Springer-Verlag
- [3] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Nauka
- [4] A. Budó, *Theoretische Mechanik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [5] C. Gerthsen, H. O. Kneser, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag
- [6] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Physik*
- [7] K.-H. Hellwege, *Einführung in die Festkörperphysik*, Springer-Verlag
- [8] E. Hering, R. Martin, M. Stohrer, *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag
- [9] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner
- [10] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons
- [11] P. A. Tipler, *Physik*