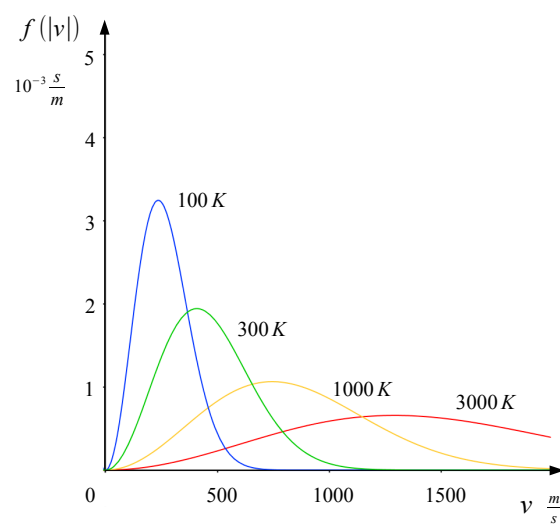


Thermodynamik

Dr. Jürgen Bolik

Technische Hochschule Nürnberg



Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Grundbegriffe | 3 |
| 1.1 | Die Temperatur | 3 |
| 1.2 | Wärme und Energie | 6 |
| 1.2.1 | Arbeit und innere Energie | 6 |
| 1.2.2 | Die Wärmekapazität | 8 |
| 1.3 | Thermische Ausdehnung | 17 |
| 1.4 | Übungsaufgaben | 19 |
| 2 | Die kinetische Gastheorie und die Zustandsgleichung idealer Gase | 21 |
| 2.1 | Die kinetische Gastheorie | 21 |
| 2.2 | Die Zustandsgleichung idealer Gase | 23 |
| 2.3 | Folgerungen aus der Zustandsgleichung für ideale Gase | 24 |
| 2.4 | Der Zusammenhang von C_p und C_V | 27 |
| 2.5 | Die Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas | 28 |
| 2.6 | Reale Gase | 30 |
| 2.7 | Zustandsänderungen idealer Gase | 31 |
| 2.8 | Übungsaufgaben | 40 |
| 3 | Der zweite und der dritte Hauptsatz der Thermodynamik | 41 |
| 3.1 | Der Begriff der Entropie | 41 |
| 3.2 | Der zweite und der dritte Hauptsatz | 43 |
| 3.3 | Wärmekraftmaschinen und Kraftwärmemaschinen | 44 |
| 3.3.1 | Arbeitsdiagramme | 47 |
| 3.3.2 | Der Wirkungsgrad von Carnot-Wärmekraftmaschinen | 51 |
| 3.3.3 | Die Leistungszahl von Carnot-Kraftwärmemaschinen | 54 |
| 3.3.4 | Reversible Kreisprozesse | 55 |
| 3.4 | Übungsaufgaben | 59 |
| 4 | Wärmetransport | 62 |
| 4.1 | Wärmeleitung | 62 |
| 4.2 | Wärmestrahlung | 69 |
| 4.3 | Konvektion | 73 |
| 4.4 | Diffusiver Wärmetransport | 74 |
| 4.5 | Wärmeübergang und Wärmedurchgang | 74 |
| 4.6 | Übungsaufgaben | 76 |

1 Grundbegriffe

1.1 Die Temperatur

- Sind zwei Systeme jedes für sich im *Gleichgewicht* und hat für beide Systeme die Temperatur T den gleichen Wert, so bleiben beide Systeme im Gleichgewicht, wenn sie miteinander in thermischen Kontakt gebracht werden.
- Nimmt T in beiden Systemen *verschiedene* Werte an, so bleiben beide Systeme *nicht* im Gleichgewicht, wenn sie miteinander in thermischen Kontakt gebracht werden.

Welche Bedingung muss das System erfüllen, damit ein Test-System, genannt *Thermometer* existiert?

Transitivität des thermischen Gleichgewichts

Sind zwei Gleichgewichtssysteme mit einem dritten im thermischen Gleichgewicht, so sind sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

Anmerkung: Der Satz wird oft als **nullter Hauptsatz der Thermodynamik** bezeichnet.

Thermometer

Zur Temperaturmessung sind im Prinzip alle Größen geeignet, die in reproduzierbarer Weise von der Temperatur abhängen.

- Am direktesten wäre eine Messung der Molekülenergie oder der Molekülgeschwindigkeit.
- Bequemer benutzt man in Quecksilber- oder Alkohol-Thermometern die Wärmeausdehnung von Flüssigkeiten, in Bimetallstreifen die von Festkörpern.

Thermodynamische Temperaturskala und der Begriff der absoluten Temperatur

Als Messnormal für die Einheit der absoluten Temperatur wurde der Tripelpunkt (Gleichgewichtspunkt der festen, flüssigen und gasförmigen Phase des Systems) des Wassers gewählt.

- Der Grund für diese Wahl ist die Tatsache, dass es nur einen einzigen Wert (p, T) von Druck und Temperatur gibt, bei dem alle drei Phasen koexistieren können,
- und dass die Temperatur nicht durch Änderungen der Mengenverhältnisse von fester, flüssiger und gasförmiger Substanz beeinflusst wird.

Seit 1960 wird dem Tripelpunkt des Wassers die Temperatur T_t (in Kelvin) zugeordnet, wobei

$$T_t = 273,16 \text{ K (exakt)}$$

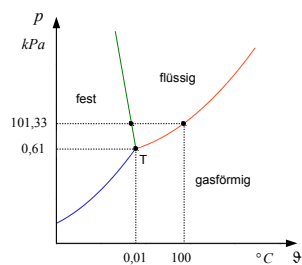


Abbildung 1.1 Der Tripelpunkt des Wassers

Der Nullpunkt der Kelvinskala ist der **absolute Nullpunkt**.

Verschiedene Temperaturskalen

- Das **Kelvin** (K), die Einheit der *thermodynamischen Temperatur* T , ist der 273,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.
- **Grad Celsius** ($^{\circ}C$) ist die Einheit der Temperaturskala ϑ . Deren Bezugspunkte sind bei 1013,25 hPa:
 - Schmelzpunkt des Eises: $0^{\circ}C$
 - Siedepunkt des Wassers: $100^{\circ}C$
- **Grad Fahrenheit** ($^{\circ}F$) ist die Einheit einer weiteren Temperaturskala θ .

Transformation der Temperaturskalen

Die Umrechnung zwischen der Kelvin- und Celsius-Skala erfolgt mittels

$$\frac{T}{K} = \frac{\vartheta}{^{\circ}C} + 273,15$$

und die zwischen Fahrenheit- und Celsius-Skala mittels

$$\frac{\theta}{^{\circ}F} = \frac{9}{5} \frac{\vartheta}{^{\circ}C} + 32$$

1.2 Wärme und Energie

Der Versuch von James Prescott Joule (1818-1889):

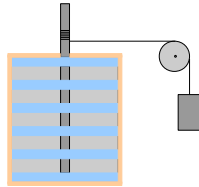


Abbildung 1.2 Apparatur von Joule zur Messung des mechanischen Wärmeäquivalents

1.2.1 Arbeit und innere Energie

Wird das Volumen eines Systems quasi-statisch von V_i auf V_f verändert und hat während dieses Prozesses der mittlere Druck des Systems den messbaren Wert $p(V)$, dann ist die vom System geleistete Arbeit gegeben durch:

$$W_{if} = \int_{V_i}^{V_f} d'W = \int_{V_i}^{V_f} p(V) dV .$$

Dabei verstehen wir unter d' ein inexaktes (wegabhängiges Differential).

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

Jedem Makrozustand eines Systems kann eine Größe U (genannt *innere Energie*) zugeordnet werden, die für abgeschlossene Systeme eine Erhaltungsgröße ist:

$$U = \text{const.}$$

Falls das System mit seiner Umgebung wechselwirken *kann* und dabei von einem Makrozustand in einen anderen übergeht, gilt für die Energieänderung

$$\Delta U = -W + Q .$$

Dabei ist W die vom System geleistete makroskopische Arbeit.
Die Größe Q heißt die *vom System aufgenommene Wärmemenge*.

Wie ist der Zusammenhang von Arbeit und innerer Energie, wenn das System *thermisch isoliert* ist, d.h. $Q = 0$ gilt?

Für $Q = 0$ gilt:

$$\Delta U = -W$$

oder

$$U_b - U_a = -W_{ab} = - \int_a^b d'W$$

Die innere Energie ist hierdurch bis auf eine beliebige additive Konstante bestimmt.

Die Wärmeenergie

Die Wärme Q_{ab} , die vom System beim Übergang vom Makrozustand a zu einem anderen Makrozustand b absorbiert wird, ist definiert als

$$Q_{ab} = (U_b - U_a) + W_{ab},$$

wobei W_{ab} die vom System in diesem Prozess geleistete makroskopische Arbeit ist.

Anmerkung: Bei Phasenübergängen (1. Ordnung) führt eine Erwärmung nicht notwendig zu einer Temperaturerhöhung (*latente Wärme*).

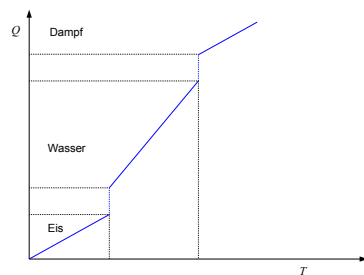


Abbildung 1.3 latente Wärme

Das Mol und die Avogadro-Zahl

1 Mol (mol) ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 g des Elements ^{12}C enthalten sind. Damit enthält 1 mol die Avogadro-Zahl an Teilchen, nämlich

$$N_A = \frac{1\text{g/mol}}{1,67 \cdot 10^{-24}\text{g}} = 6 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}.$$

1.2.2 Die Wärmekapazität

- Wir betrachten ein makroskopisches System, dessen Zustand durch seine *absolute Temperatur* T beschrieben werden kann.
- Der *Parameter* y sei beispielsweise das Volumen V (*isochore Zustandsänderung*) oder der mittlere Druck p (*isobare Zustandsänderung*) des Systems und bleibe während einer Wärmezufuhr konstant.
- Bei der Temperatur T führen wir nun eine *infinitesimal kleine Wärmemenge* zu und halten dabei y konstant.

Dann definieren wir

$$C_y := \left(\frac{d'Q}{dT} \right)_y$$

als die *Wärmekapazität* des Systems, wobei der Index y angibt, welcher Parameter konstant bleibt.

Dabei ist dQ eine infinitesimal kleine, dem System zugeführte Wärmemenge.

Die spezifische Wärmekapazität

- Die Wärmemenge, die einem homogenen System zugeführt werden muss, um eine gegebene Temperaturänderung dT hervorzurufen, wird der darin enthaltenen Materiemenge proportional sein.
- Daher ist es zweckmäßig, eine Größe, die *spezifische Wärmekapazität*, zu definieren, die nur von der Natur der Substanz und nicht von der vorhandenen Menge abhängt.
- Die *spezifische Wärmekapazität (pro Masseneinheit)* c_y ist definiert durch

$$c_y := \frac{1}{m} C_y$$

und die *molare Wärmekapazität* $C_{mol,y}$ ist definiert durch

$$C_{mol,y} := \frac{1}{\nu} C_y .$$

Dabei bezeichnet $\nu := N/N_A$ und N die Anzahl der Moleküle.

Anmerkung: Statt $C_{mol,y}$ schreiben wir auch C_y .

Unter welchen Bedingungen gilt $\Delta Q = cm\Delta T$, wobei $c = c_y$?

Allgemeiner erhalten wir

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} m c(T) dT$$

| Spezifische und molare Wärmekapazitäten einiger Elemente bei 20° C | | | |
|--|---------------------------|----------------------|----------------------------|
| Element | c in $J kg^{-1} K^{-1}$ | rel. Atommasse μ | C in $J mol^{-1} K^{-1}$ |
| Li | 3386 | 6,94 | 23,4 |
| Be | 1756 | 9,02 | 15,9 |
| Diamant C | 502 | 12,01 | 5,9 |
| Mg | 1003 | 24,32 | 24,7 |
| Si | 710 | 28,06 | 20,1 |
| K | 752 | 39,10 | 28,8 |
| Fe | 460 | 55,85 | 25,5 |
| Ag | 234 | 107,88 | 25,1 |
| W | 134 | 183,92 | 24,7 |
| Pb | 130 | 207,21 | 26,8 |

Tabelle 1.1 Spezifische und molare Wärmekapazität von Festkörpern

Die relative Atommasse μ ist gegeben durch:

$$\mu := \frac{m_A}{m_0},$$

wobei $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$ die Atomgewichtseinheit und m_A die Atommasse ist.

Freiheitsgrade

Bewegungsarten: Translation, Rotation, Schwingung

Jede solche unabhängige Bewegungsmöglichkeit nennt man einen *Freiheitsgrad*.

Bewegungsmöglichkeiten der Moleküle ergeben sich durch

- Translation,
- Rotation und
- Schwingung.

Mit f bezeichnen wir die Summe

$$f := f_{transl} + f_{rot} + f_{osc}.$$

Dabei ist

- f_{transl} die Anzahl der Translationsfreiheitsgrade,
- f_{rot} die Anzahl der Rotationsfreiheitsgrade und
- f_{osc} ein Wert, der die Schwingungen berücksichtigt.

Den Wert f nennen wir ebenfalls Freiheitsgrad.

| Freiheitsgrade von Gasmolekülen | | | | |
|-----------------------------------|--------------|-----------|----------------------|------|
| Molekülstruktur | f_{transl} | f_{rot} | $\frac{1}{2}f_{osc}$ | f |
| 1-atomig | 3 | 0 | 0 | 3 |
| 2-atomig | 3 | 2* | 1 | 7 |
| 3-atomig, linear | 3 | 2* | 4** | 13 |
| 3-atomig, gewinkelt | 3 | 3 | 3 | 12 |
| n-atomig, linear $n \geq 2$ | 3 | 2 | 3n-5 | 6n-5 |
| n-atomig, gewinkelt $n \geq 3$ | 3 | 3 | 3n-6 | 6n-6 |

Tabelle 1.2 Freiheitsgrade

*: Die Rotation um die Molekülachse wird hier als "eingefroren" betrachtet.

**: Die beiden Deformationsschwingungen unterscheiden sich weder in der Symmetrie noch in der Frequenz.

Die Zahl f für einige Gasmoleküle

- 1-atomige Moleküle:

$$f = f_{\text{transl}} = 3$$

Beispiele: Ar , He , Kr

- starre 2-atomige Moleküle:

$$f = f_{\text{transl}} + f_{\text{rot}} = 5$$

Beispiele: H_2 , O_2 , N_2 bei Raumtemperatur

- oszillierende 2-atomige Moleküle:

$$f = f_{\text{transl}} + f_{\text{rot}} + f_{\text{osc}} = 7$$

Gleichverteilungssatz (Äquipartitionstheorem)

Auf jeden Freiheitsgrad eines Moleküls entfällt im thermischen Gleichgewicht die gleiche mittlere Energie $\frac{1}{2}kT$.

Dabei ist $k = 1,38 \cdot 10^{-23} J K^{-1}$ die Boltzmann-Konstante.

Ein Molekül mit f Freiheitsgraden enthält daher die mittlere Gesamtenergie

$$W = \frac{f}{2}kT.$$

Welche Energie benötigt man, um die Temperatur eines homogenen Körpers der Masse m , bestehend aus Atomen der Masse m_A , von T_1 auf $T_2 > T_1$ zu erhöhen?

Dazu braucht man die Energie

$$\frac{m}{m_A} \frac{f}{2} k \Delta T.$$

Die *Wärmekapazität* des Körpers ist daher

$$C = \frac{m}{m_A} \frac{f}{2} k.$$

Seine *spezifische Wärmekapazität* ist

$$c = \frac{f}{2m_A} k.$$

Es gilt $m_A = \mu m_0$, wobei μ die *relative Atommasse* und $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$ die *Atomgewichtseinheit* ist.

Beispiel: Für Eisen erhalten wir

$$c = \frac{3k}{\mu m_0} = 444 J kg^{-1} K^{-1},$$

wegen $f = f_{osc} = 6$ und $\mu = 55,85$. Der gemessenen Wert ist $c = 460 J kg^{-1} K^{-1}$.

Die *molare Wärmekapazität* ist

$$C_{mol} = N_A \frac{f}{2} k.$$

Die Regel von Dulong und Petit

Für Metalle, und allgemein für Elementkristalle mit $f = 6$ gilt

$$C_{mol} = 3N_A k = 24,9 J mol^{-1} K^{-1}.$$

- Die *Regel von Dulong und Petit* ist, wie obige Tabelle zur molaren Wärmekapazität zeigt, für schwerere Elemente gut erfüllt.
- Im unteren Temperaturbereich treten Abweichungen von dieser Regel auf.

”Einfrieren” von Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgraden

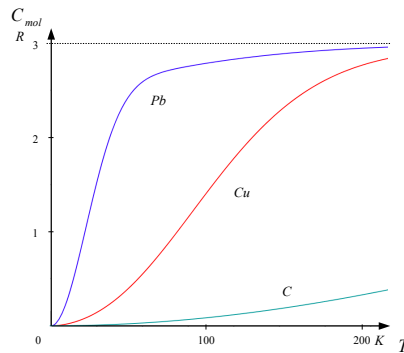


Abbildung 1.4 $C_{mol}(T)$ von Elementkristallen

Dabei ist die Gaskonstante R gegeben durch

$$R := N_A k = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

Anmerkungen zum ”Einfrieren” der Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgraden

- Bei tiefen Temperaturen geringere Energieaufnahme durch verringerte Freiheitsgrade.
- In der Nähe des absoluten Nullpunkts strebt der zugehörige energetische Beitrag gegen Null.

Die Wärmekapazität von Gasen

- Bei Gasen muss man unterscheiden, ob die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen (c_V) oder bei konstantem Druck (c_p) gemessen wird.
- c_p enthält auch die Arbeit, die das Gas bei seiner Wärmeausdehnung leisten muss.
- Bei Festkörpern ist der Unterschied weniger groß, da die Ausdehnung relativ gering ist.

| Spezifische und molare Wärmekapazitäten einiger Gase bei 0° C | | | | | |
|---|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------|
| | c_p in $J\,kg^{-1}K^{-1}$ | c_V in $J\,kg^{-1}K^{-1}$ | C_p in $J\,mol^{-1}K^{-1}$ | C_V in $J\,mol^{-1}K^{-1}$ | γ |
| He | 5230 | — | 20,9 | 12,6 | 1,66 |
| Ar | 518 | 314 | 20,7 | 12,4 | 1,67 |
| Luft | 1003 | 715 | 29,1 | 20,7 | 1,40 |
| O_2 | 915 | 656 | 29,3 | 21,0 | 1,40 |
| N_2 | 1037 | 740 | 29,0 | 20,7 | 1,40 |
| H_2 | 14210 | 10078 | 28,5 | 20,2 | 1,41 |
| CO_2 | 819 | 627 | 32,9 | 25,1 | 1,30 |
| N_2O | 849 | 660 | 34,1 | 26,5 | 1,29 |

Tabelle 1.3 Spezifische und molare Wärmekapazität von Gasen

Der Adiabaten- oder Isentropen-Exponent γ ist gegeben durch:

$$\gamma := \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V}.$$

Beispiele

N_2 bei Zimmertemperatur

- Es gilt $f = 5$ für N_2 bei Zimmertemperatur.
- Nach Rechnung erhalten wir: $c_V = 738\,J\,kg^{-1}K^{-1}$.
- Die Messung ergibt: $c_V = 740\,J\,kg^{-1}K^{-1}$.

H_2O bei Zimmertemperatur

- Die Molekülatome von H_2O sind hier nahezu frei.
- Wir setzen daher $f = 6$ und
- rechnen mit der mittleren relativen Atommasse

$$\frac{1}{3}(16 + 1 + 1) = 6.$$

- Damit erhalten wir: $c = 4150\,J\,kg^{-1}K^{-1}$.
- Die Messung ergibt: $c = 4185\,J\,kg^{-1}K^{-1}$.

Zusammenhang der Einheiten Joule und cal

Die Energie 4,185J, die man braucht, um 1g H_2O um 1K zu erwärmen, wird 1 cal genannt.

Temperaturabhängigkeit von c_V

Translations-, Rotations- und Schwingungsanteile der Wärmekapazität sind temperaturabhängig. Die folgende Abbildung zeigt den Einfluss der Temperatur auf den Schwingungsanteil c_{osz} der Wärmekapazität.

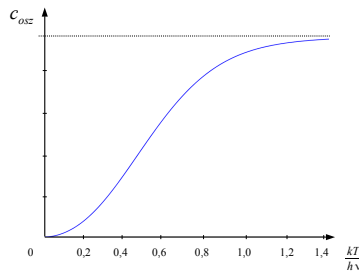


Abbildung 1.5 Die Wärmekapazität $c_{osz}(T)$ für ein diatomares ideales Gas

Kalorimeter

Die spezifische Wärmekapazität c kann mit dem *Mischungskalorimeter* bestimmt werden.

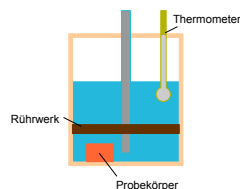


Abbildung 1.6 Mischungskalorimeter

Mischungskalorimetrie

- In einem Gefäß bekannter Wärmekapazität C_G befindet sich eine Wassermasse m_1 der Temperatur T_1 .
- Der Probekörper, dessen c gemessen werden soll, hat die Masse m_2 und wird auf T_2 (z. B. im Wasserdampfbad, $T_2 = 100^\circ\text{C}$) erhitzt und in das Kalorimeter gegeben.
- Schließlich stellt sich eine Mischungstemperatur T_m ein.

Bestimmung der Wärmekapazität des Probekörpers

Nach dem Energieerhaltungssatz erhalten wir

$$Q_2 = cm_2(T_2 - T_m) = Q_1 = (c_0m_1 + C_G)(T_m - T_1)$$

c_0 ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers. Es folgt:

$$c = \frac{c_0m_1 + C_G}{m_2} \frac{T_m - T_1}{T_2 - T_m}.$$

1.3 Thermische Ausdehnung

Anwendung: Beispielsweise für Thermometer (z.B. Quecksilber- oder Alkohol-Thermometer, Bimetallstreifen)

Die Länge l eines Festkörpers hängt von der Temperatur T näherungsweise linear ab, d.h.:

$$l = l_0(1 + \alpha T) .$$

α heißt linearer Ausdehnungskoeffizient.

| Linearer Ausdehnungskoeffizient α in $10^{-6} K^{-1}$ | | | |
|--|-------|-------|-------|
| Festkörper | 100°C | 300°C | 500°C |
| Quarzglas | 0,510 | 0,627 | 0,612 |
| Eisen | 12,00 | – | – |
| Aluminium | 23,8 | 25,6 | 27,4 |
| Kupfer | 16,7 | – | – |
| NaCl | 40,0 | – | – |

Tabelle 1.4 Linearer Ausdehnungskoeffizient α
für einige Materialien

Der Raumausdehnungskoeffizient γ

Die Abhängigkeit des Volumens $V = V(T)$ ergibt sich aus der Abhängigkeit $l = l(T)$.

Für einen Würfel mit Kantenlänge $l(T)$ erhalten wir:

$$V(T) = (l(T))^3 = l_0^3(1 + \alpha T)^3 \approx l_0^3(1 + 3\alpha T) = V_0(1 + \gamma T) ,$$

da $\alpha T \ll 1$ ist.

Für den Raumausdehnungskoeffizienten gilt daher $\gamma = 3\alpha$.

Räumliche Ausdehnung von Flüssigkeiten

Flüssigkeiten dehnen sich i.a. stärker aus als Festkörper.

| Raumausdehnungskoeffizient | |
|----------------------------|---|
| Flüssigkeit | γ in $10^{-3} K^{-1}$ bei $18^\circ C$ |
| Aceton | 1,43 |
| Ethanol | 1,62 |
| Benzol | 1,06 |
| Quecksilber | 0,181 |

Tabelle 1.5 Raumausdehnungskoeffizient γ für einige Flüssigkeiten

Die Dichteanomalie des Wassers

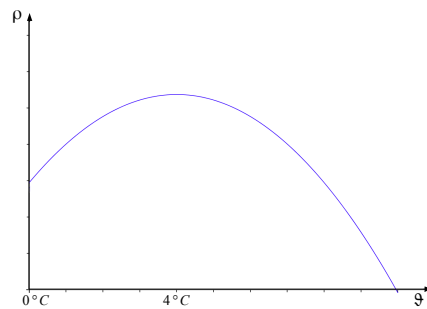


Abbildung 1.7 Dichteanomalie des Wassers

Dichtemaximum bei $4^\circ C$

1.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Ein Glas Bier ($0,5\text{ l}$) wird bei $T_0 = 8^\circ\text{C}$ serviert. Wieviel Prozent der chemischen Energie von $1,88\text{ kJ/g}$ muss vorab aufgebracht werden, um es auf eine Körpertemperatur von $T_1 = 37^\circ\text{C}$ zu erwärmen?

Anmerkung: Es gilt $c_{\text{Bier}} = c_{\text{Wasser}} = 4,18\text{ kJ/(kgK)}$.

Aufgabe 2

Ein Kalorimeter ist mit $m_1 = 1,9\text{ kg}$ Wasser der Temperatur 20°C gefüllt. Für die spezifische Wärmekapazität des Wassers gilt $c = 4187\text{ J/(kgK)}$.

- Welche Wärmekapazität hat das Kalorimeter, wenn sich eine Temperatur von 55°C einstellt, nachdem man zusätzlich $m_2 = 2,5\text{ kg}$ Wasser der Temperatur 85°C eingefüllt hat?
- Taucht man anschließend einen Messingklotz mit $m_{\text{Me}} = 1,9\text{ kg}$ und der Temperatur 110°C in das Wasser, so erhöht sich die Temperatur des Wassers auf 57°C . Wie groß ist demnach die spezifische Wärmekapazität von Messing?

Aufgabe 3

Ein ideales Gas wird in einem Gefäß durch einen beweglichen Deckel der Querschnittsfläche $A = 100,0\text{ cm}^2$ verschlossen. Auf dem Deckel befindet sich ein Gewicht der Masse m .

- Welche Masse ist erforderlich, wenn der Druck des Gases 10% höher sein soll als der Außendruck von $p_0 = 1,01 \cdot 10^5\text{ Pa}$?
- Das Gas wird nun langsam solange erhitzt, bis sich der Deckel um $5,0\text{ cm}$ hebt. Welche Arbeit hat das Gas dabei verrichtet?

Aufgabe 4

Ein rechteckiges Arbeitszimmer ($l = 7\text{ m}$, $b = 4\text{ m}$, $h = 2,6\text{ m}$) wird im Winter während der Frühstückspause kurz gelüftet, so dass sich nur ein großer Teil der Zimmerluft abkühlt. In der Mittagspause werden bei dem lang andauernden Öffnen der Fenster auch der Boden, die Wände und die Decke abgekühlt.

Vergleichen Sie den Wärmebedarf, um die Luft ($\rho_1 = 1,25\text{ kg/m}^3$, $c_1 = 1,01\text{ J/(gK)}$) in dem Zimmer um 10 K zu erwärmen, mit der Wärmemenge, die zur Erwärmung des Mauerwerks der Wände, des Bodens und der Decke (Dicke je $0,36\text{ m}$, mittlere Dichte $\rho_1 = 2300\text{ kg/m}^3$, mittlere spezifische Wärmekapazität $c_2 = 1,1\text{ J/(gK)}$) um 10 K erforderlich ist.

Aufgabe 5

Ein Eiswürfel der Masse $m_{Eis} = 250\text{ g}$ wird in ein Gefäß mit $1,0\text{ l}$ siedendem Wasser gegeben. Dabei stellt sich eine Mischungstemperatur von $\vartheta_M = 63^\circ\text{C}$ ein. Die Wärmekapazität des Gefäßes sei zu vernachlässigen.

- a) Welche Wärmemenge ΔQ gibt das 100°C heiße Wasser ab, wenn es sich auf $\vartheta_M = 63^\circ\text{C}$ abkühlt?

Anmerkung: Die Wärmekapazität von Wasser beträgt $c_W = 4,19\text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

- b) Welche Temperatur ϑ_{Eis} hatte demzufolge das Eis?

Anmerkungen: Die Wärmekapazität von Eis beträgt $c_{Eis} = 2,09\text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$;
dessen Schmelzenergie beträgt $q_f = 332\text{ kJ/kg}$.

2 Die kinetische Gastheorie und die Zustandsgleichung idealer Gase

2.1 Die kinetische Gastheorie

Die kinetische Gastheorie leitet die Eigenschaften der Gase aus mechanischen Bewegungsvorgängen der einzelnen Moleküle ab.

Wir betrachten nun

- ein verdünntes Gas
- im Gleichgewichtsfall, das
- in einen quaderförmigen Kasten, eingeschlossen ist, wobei
- zwei gegenüberliegende Randflächen A_1 und A_2 jeweils den Flächeninhalt A haben.

Wir interessieren uns dabei für die Frage:

Wie viele Moleküle treffen in einer Zeiteinheit auf die Randflächen?

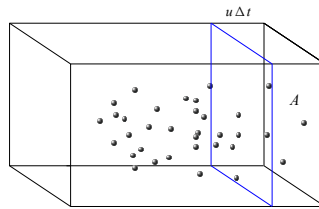


Abbildung 2.1 Impulsübertragung und Gasdruck

Annahmen

- Die Masse des Moleküls sei m .
- Die Moleküle verhalten sich wie vollkommen elastische Kugeln.
- Eine Wechselwirkung tritt nur durch Stöße auf.
- Die N Moleküle bewegen sich voneinander unabhängig, ohne eine Richtung im Raum zu bevorzugen, mit der Geschwindigkeit

$$u := \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}.$$

- Die Moleküldichte $n := \frac{N}{V}$ ist homogen und, in Folge der Gleichgewichtsbedingung, zeitlich konstant.
- In der Nähe von A_1 bewegen sich $\frac{n}{6}$ Moleküle pro Volumeneinheit in und ebenso viele entgegen der Normalenrichtung von A_1 .

Ein Molekül mit der Geschwindigkeit v gibt an die Wand den Impuls $2mv$ ab.

Innerhalb des Quaders betrachten wir ein Volumen mit der Grundfläche A und der Höhe $u\Delta t$.

Darin befinden sich $nAu\Delta t$ Moleküle.

Nach unserem Modell wird daher folgende Kraft auf die Wand ausgeübt:

$$F = 2mu\frac{1}{6}nAu.$$

Der auf die Wand ausgeübte Druck p ist daher

$$p = \frac{1}{A}F = \frac{1}{3}mnu^2.$$

2.2 Die Zustandsgleichung idealer Gase

Nach der kinetischen Wärmetheorie ist die Temperatur nur ein anderes Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle. Betrachten wir nur die Translationsenergie, so erhalten wir nach dem Gleichverteilungssatz

$$\bar{W}_{trans} = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}kT.$$

Die **Grundgleichung der kinetischen Gastheorie** von *Daniel Bernoulli* lässt sich daher folgendermaßen schreiben:

$$p = nkT.$$

Mit $n = \frac{N}{V}$ erhalten wir schließlich

$$pV = NkT.$$

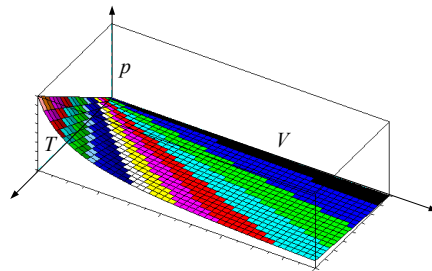


Abbildung 2.2 Der Graph der Zustandsfunktion $p(V, T)$ eines Idealgases

Der Zustand einer gegebenen Masse M eines idealen Gases mit fester Teilchenzahl N ist damit durch die drei Größen T , p und V vollständig beschrieben.

Zwei davon können unabhängig voneinander variiert werden.
Die dritte ist dann eindeutig bestimmt.

Setzen wir $N = \nu N_A$ und $R = N_A k = 8,31 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$, so gilt:

$$pV = \nu RT.$$

2.3 Folgerungen aus der Zustandsgleichung für ideale Gase

- *Das Gesetz von Boyle-Mariotte:*
Bei konstanter Temperatur gilt

$$p \sim V^{-1}$$

- *Das 1. Gesetz von Gay-Lussac:*
Bei konstantem Druck gilt

$$V \sim T$$

- *Das 2. Gesetz von Gay-Lussac:*
Bei konstantem Volumen gilt

$$p \sim T$$

Anmerkung: Die zusätzlichen Bezeichnungen *Gesetz von Charles* und *Gesetz von Amontons* werden in der Literatur leider nicht einheitlich verwendet.

Das 1. Gesetz von Gay-Lussac lässt sich auch folgendermaßen formulieren

$$V(T) = V_0(1 + \gamma_0(T - T_0)) \quad \text{mit } \gamma_0 := \frac{1}{T_0},$$

wobei $V_0 := V_0(T_0)$ und γ_0 der Volumenausdehnungskoeffizient γ bei der Temperatur T_0 ist. Wir können diese Eigenschaft mittels

$$\frac{V(T) - V_0}{V_0} = \frac{T - T_0}{T_0}$$

und

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \Delta T$$

zeigen, da

$$\gamma = \gamma_0 := \frac{1}{T_0}$$

ist.

Anmerkung: Rechnerisch ist hierbei $V(T = 0 \text{ K}) = 0$.

Betrachten wir nun $T_0 = 273,15 \text{ K}$, so zeigt sich, dass für die Volumenausdehnung eines Idealgases:

Bei einer Temperaturerhöhung um 1 K beträgt die Volumenausdehnung $\frac{1}{273,15} = 3,66 \cdot 10^{-3}$ des Volumens bei 0°C .

Die folgende Tabelle bietet einen Vergleich dieses theoretischen Wertes mit empirischen Daten für den *Raumausdehnungskoeffizienten* im Temperaturbereich $T \in [0^\circ\text{C}, 100^\circ\text{C}]$:

| Raumausdehnungskoeffizient | |
|----------------------------|-----------------------------|
| | γ in $10^{-3}K^{-1}$ |
| <i>Luft</i> | 3,675 |
| <i>H₂</i> | 3,662 |
| <i>He</i> | 3,660 |
| <i>Ar</i> | 3,676 |
| <i>CO₂</i> | 3,726 |

Tabelle 2.1 Raumausdehnungskoeffizient
 γ für einige Gase

Das Gesetz von Avogadro für Idealgase

- Das Molvolumen $\frac{V}{\nu}$ zweier Gase ist, bei gleicher Temperatur und gleichem Druck, identisch.

oder anders formuliert

- Zwei gleich große Gasvolumina enthalten bei gleicher Temperatur und gleichem Druck die gleiche Anzahl von Teilchen.

Begründung: Nach der Zustandsgleichung erhalten wir

$$\nu = \frac{pV}{RT}.$$

Anmerkung: Für $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$ und $T_0 = 273,15 \text{ K}$ erhalten wir

$$\frac{V}{\nu} = R \frac{T_0}{p_0} = 22,4 \frac{\text{dm}^3}{\text{mol}}.$$

Anmerkung zur Kelvin-Skala

Mittels eines Gasthermometers lässt sich, bei konstantem Volumen, die Temperatur mit Hilfe des Druckes feststellen. Wählen wir die Celsius-Skala, so gilt

$$\vartheta = ap + b,$$

wobei sich die Konstanten mit Hilfe des Gefrier- und Siedepunktes des Wasser durch

$$0^{\circ}C = ap_g + b$$

und

$$100^{\circ}C = ap_s + b$$

berechnen lassen. Damit ergibt sich

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{p}{p_g} - 1 \right)$$

und

$$p = p_g \left(1 + \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right),$$

wobei

$$\vartheta_0 := 100^{\circ}C \cdot \left(\frac{p_s}{p_g} - 1 \right)^{-1}.$$

Messungen ergaben, dass $\vartheta_0 = 273,15^{\circ}C$ ist. Werden Messungen an zwei Systemen mit den Temperaturen ϑ_A und ϑ_B durchgeführt, so lässt sich die Eigenschaft

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{\vartheta_0 + \vartheta_A}{\vartheta_0 + \vartheta_B}$$

nutzen. Setzen wir, wie bei der Kelvin-Skala,

$$T := \vartheta_0 + \vartheta,$$

so erhält diese Gleichung die einfache Form

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}.$$

2.4 Der Zusammenhang von C_p und C_V

Bei konstantem Druck erfordert die Erwärmung eines Gases mehr Energie als bei konstantem Volumen, da das System auch für die *Volumenzunahme* Energie benötigt.

Nach dem 1. Gesetz von Gay-Lussac erhalten wir

$$\Delta V = V \frac{\Delta T}{T}$$

und somit

$$p\Delta V = pV \frac{\Delta T}{T} = \nu RT \frac{\Delta T}{T} = \nu R\Delta T$$

Daher gilt für die molare Wärmekapazität C_p

$$C_p = C_V + R = \left(\frac{f}{2} + 1\right)R$$

und für den Adiabaten-Exponenten

$$\gamma := \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$$

Daher erhalten wir für die Molwärmen C_V und C_p in Abhängigkeit von f :

| Molwärmen von Gasen nach der kinetischen Theorie der Wärme | | | | |
|--|-----|---|---|----------|
| Molekül- struktur * | f | C_V in $J \text{ mol}^{-1} K^{-1}$ | C_p in $J \text{ mol}^{-1} K^{-1}$ | γ |
| 1-atomig | 3 | 12,5 | 20,8 | 1,667 |
| 2-atomig | 5 | 20,8 | 29,1 | 1,40 |
| 3-atomig, gewinkelt | 6 | 24,9 | 33,3 | 1,33 |

Tabelle 2.2 Molwärmen C_V und C_p von Gasen

*: Die Moleküle werden hier als nicht-oszillierend vorausgesetzt.

2.5 Die Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas

Die Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$

Wir betrachten ein verdünntes Gas bestehend aus

- N Molekülen der Masse m mit Volumen V ,
- wobei sich der Schwerpunkt eines Moleküls mit einer Geschwindigkeit v bewegt.

Für die Molekülgeschwindigkeit in Luft erhalten wir, abhängig von der Temperatur, folgende Verteilungsfunktion $f(\|v\|)$:

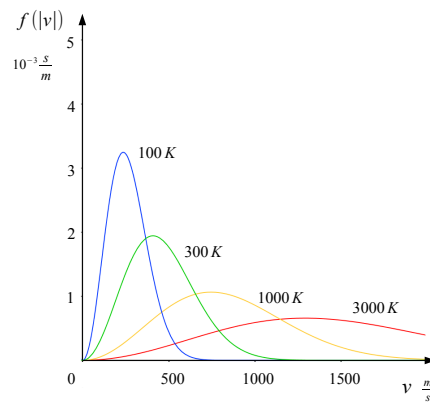


Abbildung 2.3 Die Geschwindigkeitsverteilung $f(\|v\|)$ in Luft

Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(v) := \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\|v\|^2}{2kT}}$$

ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

Auch für die (kartesischen) Geschwindigkeitskomponenten lassen sich Verteilungsfunktionen angeben. Hinsichtlich v_x gilt

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}.$$

Der Mittelwert u

Um u zu bestimmen, betrachten wir

$$\bar{v}_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Dabei ist $g(v_x)$ die Dichtefunktion einer Gauß-Verteilung, falls $T = \text{const.}$

Mit

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}, \text{ für } a > 0,$$

folgt

$$\bar{v}_x^2 = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{kT}{m}.$$

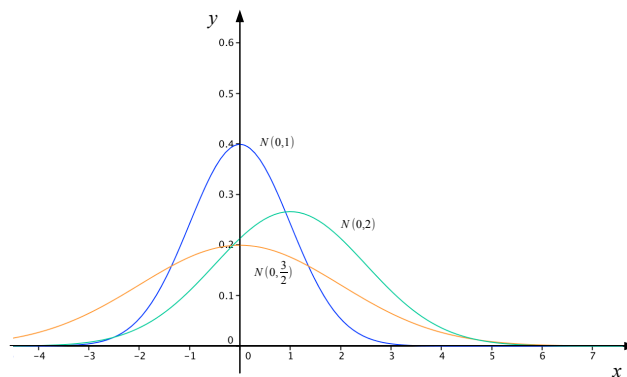


Abbildung 2.4 Die Dichtefunktion der Normalverteilung

Wegen $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2$, können wir $\bar{v}^2 = 3\bar{v}_x^2$ und somit

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

schreiben.

Damit erhalten wir wieder

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

2.6 Reale Gase

Die oben genannte Zustandsgleichung gilt für ein *Idealgas*, in dem die Teilchen,

- abgesehen von kurzzeitigen Stößen keine Kräfte aufeinander ausüben und
- ein vernachlässigbares Eigenvolumen haben.

Diese Voraussetzungen sind umso schlechter erfüllt, je dichter das Gas und je tiefer die Temperatur ist.

Da Moleküle einen gewissen Raum beanspruchen und Anziehungskräfte aufeinander ausüben, ist die Zustandsgleichung des idealen Gases nicht allgemein gültig.

Die van der Waals-Gleichung

Ein besseres Modell als die Zustandsgleichung des Idealgases bietet die van der Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Dabei sind die Größen a und b Konstanten und V_m das molare Volumen.

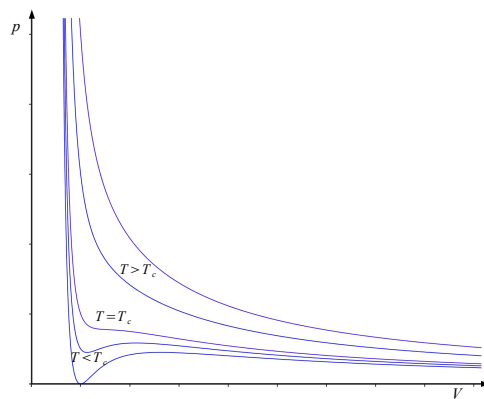


Abbildung 2.5 Van der Waals-Isothermen

Die Temperatur, oberhalb der sich ein Gas durch Druckerhöhung nicht mehr verflüssigen lässt, heißt seine *kritische Temperatur* T_c .

2.7 Zustandsänderungen idealer Gase

Hierbei werden Änderungen der Zustandsgrößen p, V, T betrachtet.

Die Teilchenzahl N ist konstant.

Wir unterscheiden zwischen

- isochoren Zustandsänderungen
- isobaren Zustandsänderungen
- isothermen Zustandsänderungen
- adiabatischen Zustandsänderungen

Ist die innere Energie, wie bei idealen Gasen, Bewegungsenergie, so gilt:

$$dU = \nu C_V dT.$$

Weitere Formen der inneren Energie zeigen sich, wenn Energie bei

- Schmelz-
- Verdampfungs-
- oder Lösungsvorgängen,

oder beispielsweise zur Überwindung der

- chemischen Bindungsenergie oder
- elektromagnetischen Wechselwirkung

aufgewandt wird.

a) Isochore Zustandsänderung

Hier ist $V = \text{const.}$ Somit gilt $p \sim T$.

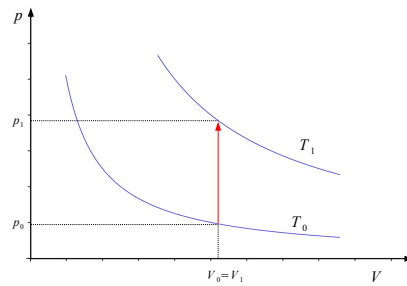


Abbildung 2.6 Isochore Zustandsänderung

Außerdem gilt hier $dV = 0$.

Nach dem 1. Hauptsatz

$$dU = d'Q - p dV$$

erhalten wir

$$dU = d'Q .$$

Ferner gilt

$$d'Q = \nu C_V dT .$$

b) Isobare Zustandsänderungen

Hier ist $p = \text{const.}$ Somit gilt $V \sim T$.

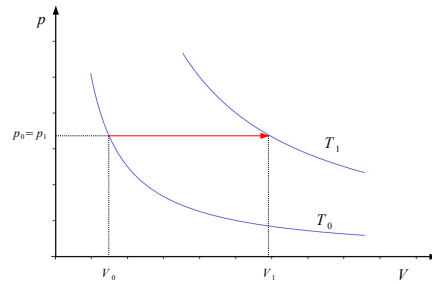


Abbildung 2.7 Isobare Zustandsänderung

Nach dem 1. Hauptsatz erhalten wir

$$dU = d'Q - p dV .$$

Ferner gilt

$$d'Q = \nu C_p dT$$

und nach der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p dV = \nu R dT .$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$dU = \nu dT \cdot (C_p - R) = \nu C_V dT .$$

c) Isotherme Zustandsänderungen

Hier ist $T = \text{const.}$ Somit gilt $p \sim V^{-1}$.

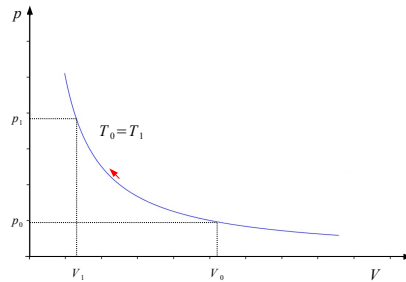


Abbildung 2.8 Isotherme Zustandsänderung

Die innere Energie U eines Idealgases mit f Freiheitsgraden und N Molekülen beträgt

$$U = \frac{f}{2} N k T.$$

Da hier T konstant ist, erhalten wir $\Delta U = 0$ und nach dem 1. Hauptsatz:

$$\Delta Q - \int_{V_0}^{V_1} p dV = 0$$

Außerdem gilt hier

$$\int_{V_0}^{V_1} p dV = \nu R T \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = \nu R T \ln V \Big|_{V_0}^{V_1} = \nu R T \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right).$$

Schließlich erhalten wir

$$\Delta Q = \nu R T \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right).$$

d) adiabatische Zustandsänderungen

Eine thermodynamische Zustandsänderung ohne Wärmeaustausch (d. h. mit $dQ = 0$) wird *adiabatisch* genannt.

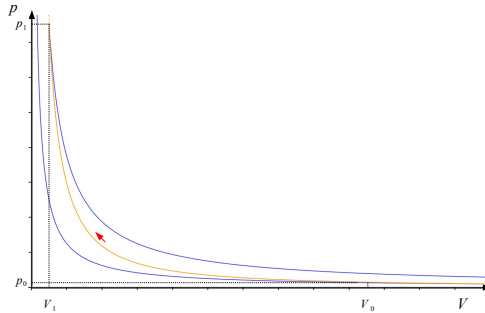


Abbildung 2.9 Adiabatische Zustandsänderung

Der 1. Hauptsatz lautet

$$d'Q = dU + p dV .$$

Für die innere Energie U eines Idealgases gilt

$$dU = \nu C_V dT .$$

Daher erhalten wir für eine adiabatische Zustandsänderung:

$$\nu C_V dT = -p dV .$$

Mit der Zustandsgleichung des Idealgases

$$p = \nu RT \cdot V^{-1}$$

und der molaren Wärmekapazität C_V , mit

$$C_V = \frac{f}{2} R ,$$

folgt

$$\frac{f}{2} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} .$$

Eine Integration impliziert

$$V \sim T^{-\frac{f}{2}} .$$

Mit dem Adiabatenexponent

$$\gamma = \frac{f+2}{f}$$

erhalten wir

$$V \sim T^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung ergibt sich

$$T = \frac{pV}{\nu R}$$

und daher

$$\frac{pV}{\nu R} \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}$$

Zusammengefasst bedeutet das:

$$p \sim V^{-\gamma}$$

$$\text{mit } \gamma: 1 < \gamma \leq \frac{5}{3}.$$

Zum Vergleich: Für die Isothermen des Idealgases gilt $p \sim V^{-1}$.

Betrachten wir nun

$$p \sim V^{-\gamma}$$

und beispielsweise

$$V \sim T^{-\frac{1}{\gamma-1}},$$

so zeigt sich, dass sich p auch als Funktion mit der Temperatur T als einziger Variablen ausdrücken lässt:

So erhalten wir

$$p \sim T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Zusammengefasst lauten die **Adiabaten- oder Poisson-Gleichungen**:

$$pV^{\gamma} = c_1,$$

$$TV^{\gamma-1} = c_2,$$

$$p^{1-\gamma}T^{\gamma} = c_3.$$

Dabei sind c_i , $i = 1, 2, 3$ reelle Konstanten.

Bei adiabatischer Kompression wird das Gas erwärmt.

- Ursache ist die bei der Kompression geleistete Arbeit.
- Anders als bei der isothermen Kompression kann hier die Wärme nicht an ein Wärmebad abgeführt werden.
- Die Temperaturerhöhung lässt sich mittels

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1-\gamma}$$

berechnen.

ΔW und ΔU lassen sich auch für adiabatische Zustandsänderungen berechnen:

Es gilt für $\gamma \neq 1$:

$$\int_{V_0}^{V_1} p dV = c_1 \int_{V_0}^{V_1} V^{-\gamma} dV,$$

wobei

$$\int_{V_0}^{V_1} V^{-\gamma} dV = \frac{1}{-\gamma+1} V^{-\gamma+1} \Big|_{V_0}^{V_1} = \frac{1}{1-\gamma} (V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}).$$

Da $c_1 = pV^\gamma$, erhalten wir schließlich

$$\int_{V_0}^{V_1} p dV = \frac{1}{1-\gamma} \cdot (p_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma} - p_0 V_0^\gamma V_0^{1-\gamma}) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot (p_1 V_1 - p_0 V_0).$$

Der Term

$$\Delta U = -\frac{1}{1-\gamma} \cdot (p_1 V_1 - p_0 V_0)$$

lässt sich mit Hilfe der Zustandsgleichung folgendermaßen umformen:

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \nu R \cdot (T_1 - T_0).$$

Berücksichtigen wir, dass für γ

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = 1 + \frac{2}{f}$$

und für die molare Wärmekapazität C_V

$$C_V = \frac{f}{2} R$$

gilt, so zeigt sich, dass

$$\frac{R}{\gamma - 1} = C_V.$$

Somit erhalten wir für die Änderung der inneren Energie ΔU wieder

$$\Delta U = \nu C_V \cdot \Delta T.$$

Betrachten wir die Bestimmung der inneren Energie

wie in unserer Bemerkung zum 1. Hauptsatz der Thermodynamik,

so zeigt sich, dass die innere Energie eines idealen Gases durch

$$dU = \nu C_V dT$$

auch allgemein, d. h. nicht nur im Rahmen adiabatischer Zustandsänderungen, bis auf eine additive Konstante, bestimmt ist.

e) Beschreibungen und Folgerungen der Zustandsänderungen

Überblick

| Beschreibung der Zustandsänderung | | | |
|---|-----------|---------------------------|--|
| Zustandsänderung | Bedingung | Graph im $p(V)$ -Diagramm | Funktionen der Zustandsgrößen |
| <i>isochor</i> | $dV = 0$ | $V = \text{const.}$ | $pT^{-1} = \text{const.}$ |
| <i>isobar</i> | $dp = 0$ | $p = \text{const.}$ | $VT^{-1} = \text{const.}$ |
| <i>isotherm</i> | $dT = 0$ | $p \sim V^{-1}$ | $pV = \text{const.}$ |
| <i>adiabatisch</i> (<i>isentrop</i>) | $d'Q = 0$ | $p \sim V^{-\gamma}$ | $pV^{\gamma} = \text{const.}$ $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{const.}$ |

| Folgerungen der Zustandsänderung | | | |
|---|-------------------|---|---|
| Zustandsänderung | I. Hauptsatz | ΔQ | $\int_{V_0}^{V_1} p dV$ |
| <i>isochor</i> | $dU = d'Q$ | $\Delta Q = \nu C_V \Delta T$ | 0 |
| <i>isobar</i> | $dU = d'Q - p dV$ | $\Delta Q = \nu C_p \Delta T$ | $p \Delta V$ |
| <i>isotherm</i> | $d'Q = p dV$ | $\Delta Q = \nu RT \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$ | ΔQ |
| <i>adiabatisch</i> (<i>isentrop</i>) | $dU = -p dV$ | $\Delta Q = 0$ | $\frac{1}{1-\gamma}(p_1 V_1 - p_0 V_0)$ |

Tabelle 2.3 Überblick: Zustandsänderungen

Anmerkung: C_p und C_V werden hier als von T unabhängige Größen vorausgesetzt.

2.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Ein Kompressor saugt stündlich 200 m^3 atmosphärische Luft an und komprimiert sie auf einen Druck von $1,0 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. Die Kompression soll als isothermer Prozess betrachtet werden, weil während der Kompression die Luft durch einen Wasserstrom gekühlt wird. Wie viel Wasser fließt pro Stunde durch die Kühlvorrichtung, wenn das Wasser ausgehend von 10°C um $8,0 \text{ K}$ erwärmt wird?

Anmerkung: Die spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt $4,18 \text{ kJ/kgK}$.

Aufgabe 2

Eine Masse von 100 kg belastet einen in einem vertikalen Zylinder beweglichen Kolben. Im Zylinder befindet sich ein einatomiges ideales Gas unter einem konstanten Druck von $4,0 \text{ bar}$. Das Volumen ist $1,0 \text{ dm}^3$. Die Umgebung hat einen Druck von $1,0 \text{ bar}$ und eine Temperatur von 20°C .

- Welche Arbeit muss verrichtet werden, um das Gewicht um $1,0 \text{ m}$ zu heben?
- Welche Wärmeenergie muss dem Gas dazu zugeführt werden?
- Welche Temperatur hat das Gas dann?

Aufgabe 3

Das Volumen eines mit Luft von 20°C gefüllten Stoßdämpfers kann sich von $0,020 \text{ m}^3$ auf $0,0040 \text{ m}^3$ verringern, wobei der Druck beim Ausgangsvolumen $1,0 \text{ bar}$ beträgt. Die Kompression verläuft adiabatisch.

- Welche Energie nimmt der Stoßdämpfer auf, wenn sich das Volumen auf den kleinsten Wert verringert?
- Welchen Wert erreichen Druck und Temperatur im Zustand kleinsten Volumens?

Aufgabe 4

Ein Kreiszylinder wird mittels eines verschiebbaren Kolbens verschlossen. Befindet sich der Kolben in einer Höhe von $1,00 \text{ m}$, hat die im Zylinder befindliche Luft eine Temperatur von 20°C und steht unter einem Druck von 1000 hPa . Auf welchen Betrag ändern sich Druck und Temperatur der eingeschlossenen Luft, wenn bei einer adiabatischen Kompression der Kolben um den Betrag von $0,50 \text{ m}$ verschoben wird?

3 Der zweite und der dritte Hauptsatz der Thermodynamik

3.1 Der Begriff der Entropie

Der *mikroskopisch-statistische* Begriff der Entropie S ist mit der Wahrscheinlichkeit P eines Zustandes verknüpft.

Der *makroskopisch-phänomenologische* Begriff der Entropie hingegen steht in Zusammenhang mit der aufgenommenen Wärmemenge und der Temperatur. Hierbei nehmen wir zusätzlich an, dass die Zustandsänderung

- zwischen zwei Makrozuständen eines Gleichgewichtssystems,
- als quasistatischer infinitesimaler (d. h. reversibler) Prozess

stattfindet.

Dabei definieren wir S folgendermaßen:

- Nach der *mikroskopisch-statistischen* Definition durch

$$S = k \ln P.$$

und nach der *makroskopisch-phänomenologischen* Definition durch

$$dS = \frac{d'Q}{T}.$$

Die letztere, klassische Definition besagt, dass sich der infinitesimale Unterschied der Entropie zweier benachbarter Systemzustände dS bestimmen lässt mittels der

- bei einer bestimmten absoluten Temperatur T ,
- in einem reversiblen Prozess,
- vom System aufgenommenen infinitesimalen Wärmeenergie dQ .

Wir nehmen an, dass

- sich zum Zeitpunkt t_0 alle N Moleküle eines Gases in einer Gefäßhälfte befinden,
- sich die Moleküle, abgesehen von Stößen an den Gefäßwänden oder bei Kollisionen der Gasteilchen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jede beliebige Richtung des Raumes bewegen können,
- Wechselwirkungen nur durch diese Stöße auftreten,
- und N hinreichend groß ist.

Liegen keine weiteren Einschränkungen vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass nach einer angemessenen Zeit dieser Zustand 0 vorliegt

$$P = 2^{-N}.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass dann der komplementäre Zustand 1 vorliegt, etwa 2^N -mal größer als das Eintreten des Zustandes 0. Daher ist die Entropie des Zustandes 1 um etwa

$$\Delta S = k \ln 2^N = kN \ln 2$$

höher als die für Zustand 0.

Andererseits gilt für den Wärmeaustausch bei isothermer Expansion

$$\Delta Q = \nu RT \ln \frac{V_1}{V_0} = \nu RT \ln 2.$$

Demnach erhalten wir, nun nach der klassischen Definition der Entropie,

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \nu R \ln 2 = kN \ln 2.$$

Anmerkungen

- für isochore Zustandsänderungen gilt

$$dS = \frac{d'Q}{T} = \nu C_V \frac{dT}{T}$$

und damit, bei konstantem C_V ,

$$T = T(S) = T_0 \exp\left(\frac{1}{\nu C_V} \Delta S\right).$$

- für isobare Zustandsänderungen gilt

$$dS = \frac{d'Q}{T} = \nu C_p \frac{dT}{T}$$

und damit, bei konstantem C_p ,

$$T = T(S) = T_0 \exp\left(\frac{1}{\nu C_p} \Delta S\right).$$

3.2 Der zweite und der dritte Hauptsatz

Zweiter Hauptsatz

Die Entropie S erfüllt für jeden Makrozustand eines Gleichgewichtssystems die folgenden Bedingungen:

- Für jeden Prozess zwischen zwei Gleichgewichtszuständen eines *thermisch isolierten* Systems gilt:

$$\Delta S \geq 0.$$

- Durchläuft ein *nicht-abgeschlossenes* System einen quasistatischen infinitesimalen Prozess, wobei es die Wärmemenge dQ aufnimmt, so gilt

$$dS = \frac{d'Q}{T}.$$

Der *erste Hauptsatz der Thermodynamik* schließt ein *perpetuum mobile erster Art* aus.

Das wäre eine Maschine, die Arbeit leistet, ohne weitere Veränderungen in der Natur herbeizuführen, d. h. der Umgebung Energie zu entziehen.

Der *zweite Hauptsatz der Thermodynamik* schließt ein *perpetuum mobile zweiter Art* aus.

Das wäre eine Maschine, die Arbeit leistet, indem sie als einzige Veränderung in der Natur ein Wärmereservoir abkühlt.

Eine derartige Maschine könnte jede Zustandsänderung in einen reversiblen Prozess einbetten, so dass es keine irreversiblen Vorgänge gäbe.

Auf Grundlage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik wird ein adiabatisch reversibler Prozess auch als *isentrop* bezeichnet.

Dritter Hauptsatz

Die Entropie S eines Gleichgewichtssystems hat die Grenzwerteigenschaft

$$S \rightarrow S_0 \text{ für } T \rightarrow 0.$$

Dabei ist S_0 eine von den Systemparametern unabhängige Konstante.

3.3 Wärmekraftmaschinen und Kraftwärmemaschinen

Unter einem *Kreisprozess* verstehen wir eine Folge von Zustandsänderungen, die periodisch durchlaufen wird.

- Damit erhalten wir Maschinen, die eine Folge von Zustandsänderungen zyklisch durchlaufen.
- Zusätzlich können wir uns die Folge von Zustandsänderungen auch in umgekehrter Reihenfolge denken.

Wärmekraftmaschinen wandeln Wärmeenergie in mechanische Energie um.

Beispiele: Dampfmaschinen, Verbrennungsmotoren,
Gas- und Dampfturbinen

Kraftwärmemaschinen wandeln mechanische Energie in Wärmeenergie um.

Beispiele: Kältemaschinen (Kühlschrank, Klimaanlage), Wärmepumpe

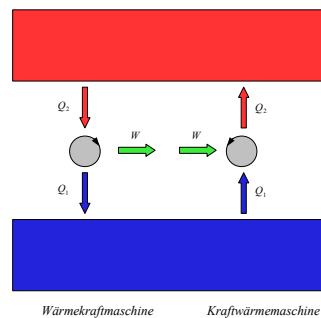


Abbildung 3.1 Wärme und Arbeit

Bei **Wärmekraftmaschinen** wird

- Wärme dem heißen Gas entzogen,
- mechanische Energie abgegeben und
- Wärme an das kühle Gas abgeführt.

Bei **Kraftwärmemaschinen** wird

- Wärme dem heißen Gas zugeführt,
- mechanische Energie zugeführt und
- Wärme dem kühlen Gas entzogen.

Anmerkung zum Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

Unter einer *Joule-Thomson-Maschine* wird eine ideale Wärme(kraft)maschine verstanden, die Arbeit W mit $W = Q$ allein durch Abkühlen eines Wärmereservoirs verrichtet und folgende Voraussetzungen erfüllt:

- Die Maschine soll einen Kreisprozess so durchlaufen, dass sie sich nach jedem Durchgang wieder im gleichen Makrozustand befindet wie zuvor.
- Die Maschine soll Arbeit so leisten, dass die Entropieänderung der Vorrichtung, mit der die Maschine die Arbeit verrichtet, Null ist.

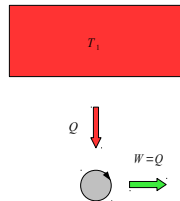


Abbildung 3.2 Die Joule-Thomson-Maschine

Da die Maschine nach jedem Zyklus in ihren Ausgangszustand zurückkehrt, ist ihre Entropieänderung nach einem Durchlauf Null. Auch die Entropieänderung der äußeren Vorrichtung ist Null. Weiterhin ist die Entropieänderung des Wärmereservoirs mit der Temperatur T_1

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_1},$$

da das Reservoir die Wärmemenge $-Q$ aufnimmt. Nach dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gilt für die Entropieänderung des Gesamtsystems, bestehend aus der Wärmekraftmaschine, der damit verbundenen Vorrichtung, die zur Verrichtung der Arbeit dient, und dem Wärmereservoir:

$$\Delta S \geq 0,$$

bei Durchlaufen eines Zyklus. Folglich gilt

$$-\frac{Q}{T_1} \geq 0.$$

Da zusätzlich $W = Q$ vorausgesetzt wurde, folgt

$$\frac{W}{T_1} \leq 0.$$

Nach unserer Schreibweise des ersten Hauptsatzes ist $W > 0$, falls die Maschine Arbeit verrichtet. Ein positiver Wert von W ist jedoch nach der letztgenannten Ungleichung nicht möglich. Demnach kann die beschriebene, als Joule-Thomson-Maschine bezeichnete Maschine nicht existieren. Der umgekehrte Prozess, bei dem Arbeit in Wärme umgewandelt wird, kann allerdings stattfinden.

3.3.1 Arbeitsdiagramme

Der Carnot-Kreisprozess

Folge der Zustandsänderungen: *isotherm*, *adiabatisch*, *isotherm*, *adiabatisch*

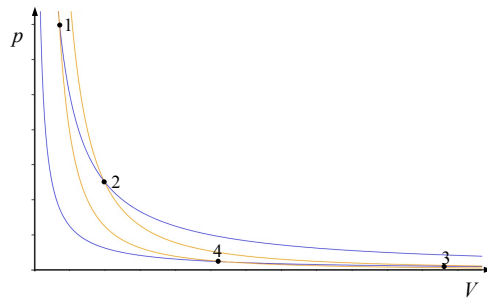


Abbildung 3.3 Carnot-Zyklus im p-V-Diagramm

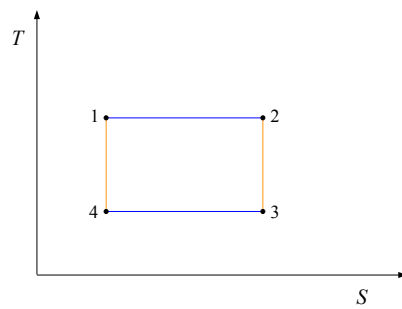


Abbildung 3.4 Carnot-Zyklus im T-S-Diagramm

Der Stirling-Kreisprozess

Folge der Zustandsänderungen: *isotherm, isochor, isotherm, isochor*

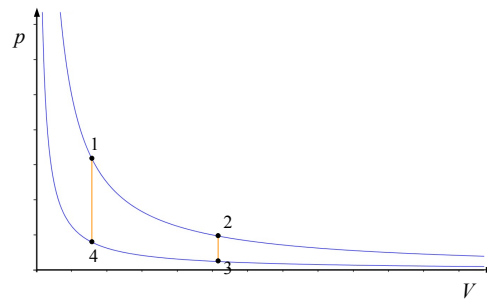


Abbildung 3.5 Stirling-Zyklus im p-V-Diagramm

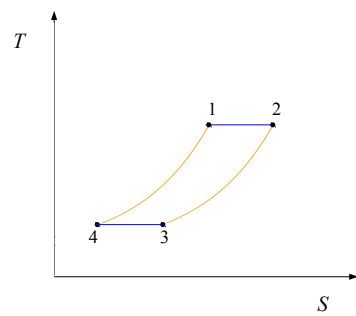


Abbildung 3.6 Stirling-Zyklus im T-S-Diagramm

Der Otto-Kreisprozess

Folge der Zustandsänderungen: *adiabatisch, isochor, adiabatisch, isochor*

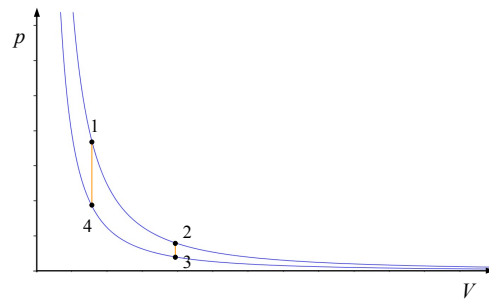


Abbildung 3.7 Otto-Zyklus im p - V -Diagramm

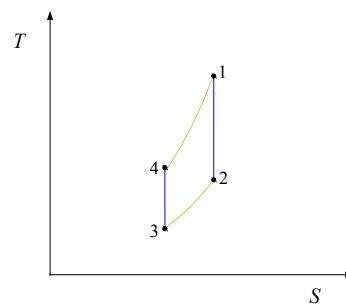


Abbildung 3.8 Otto-Zyklus im T - S -Diagramm

Der Diesel-Kreisprozess

Folge der Zustandsänderungen: *isobar*, *adiabatisch*, *isochor*, *adiabatisch*

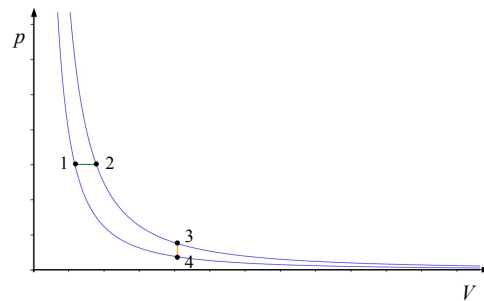


Abbildung 3.9 Diesel-Zyklus im p-V-Diagramm

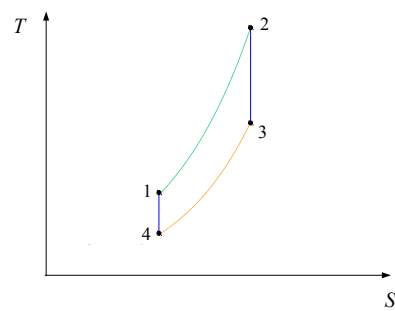


Abbildung 3.10 Diesel-Zyklus im T-S-Diagramm

3.3.2 Der Wirkungsgrad von Carnot-Wärmekraftmaschinen

Der Carnot-Kreisprozess

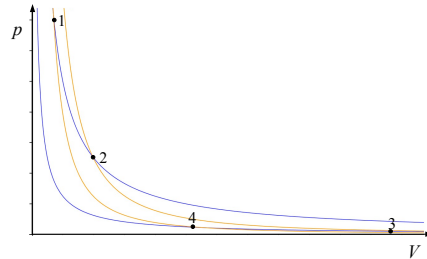


Abbildung 3.11 Carnot-Zyklus im p-V-Diagramm

Folge der Zustandsänderungen:

- 1.) *isotherme Expansion* $1 \rightarrow 2$,
- 2.) *adiabatische Expansion* $2 \rightarrow 3$,
- 3.) *isotherme Kompression* $3 \rightarrow 4$,
- 4.) *adiabatische Kompression* $4 \rightarrow 1$

isotherme Expansion $1 \rightarrow 2$ und *isotherme Kompression* $3 \rightarrow 4$

Die innere Energie U ist konstant, d.h. $\Delta U = 0$.

Wärmeaustausch bei $1 \rightarrow 2$

$$\Delta Q = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

und bei $3 \rightarrow 4$

$$\Delta Q = \nu R T_3 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

adiabatische Expansion $2 \rightarrow 3$ und *adiabatische Kompression* $4 \rightarrow 1$

Die Wärmeenergie Q ist konstant, d.h. $\Delta Q = 0$.

Mit unserer Formel für die innere Energie

$$dU = \nu C_V dT$$

erhalten wir daher bei $2 \rightarrow 3$:

$$-\int_{V_2}^{V_3} p dV = \nu C_V \cdot (T_3 - T_2)$$

und bei $4 \rightarrow 1$:

$$-\int_{V_4}^{V_1} p dV = \nu C_V \cdot (T_1 - T_4).$$

Um den *Wirkungsgrad* einer Carnot-Wärmekraftmaschine zu berechnen, bestimmen wir den Wert

$$\oint p dV$$

hinsichtlich eines Carnot-Kreisprozesses.

Für die beiden *adiabatischen Prozesse* berücksichtigen wir:

Da $T_2 = T_1$ und $T_4 = T_3$ gilt, unterscheiden sich die Werte für die Volumenarbeit bei $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ nur durch das Vorzeichen und heben sich daher auf.

Für die beiden *isothermen Prozesse* berücksichtigen wir:

Sowohl $T_2 = T_1$ und $T_4 = T_3$ sind durch die Adiabatangleichung verknüpft. So gilt

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

und daher

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Betrachten wir einen Umlauf $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, so erhalten für den *gesamten Wärmeaustausch* ΔQ :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \nu R T_3 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \\ &= \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_1 - T_3) \end{aligned}$$

und für die *nutzbare mechanische Arbeit* W_{Nutzen}

$$|W_{\text{Nutzen}}| = \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_1 - T_3).$$

Für den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine gilt

$$\eta = \frac{|W_{\text{Nutzen}}|}{|Q_{\text{Aufwand}}|}.$$

Daher erhalten wir

$$\eta = \frac{\nu R \ln(\frac{V_2}{V_1})(T_1 - T_3)}{\nu R T_1 \ln(\frac{V_2}{V_1})} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}.$$

Anmerkung

Nach dem 1. Hauptsatz gilt nach Durchlaufen eines Zyklus

$$W = Q_1 - Q_2.$$

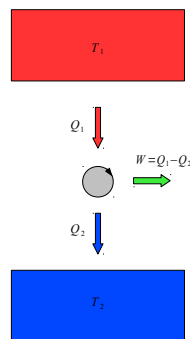


Abbildung 3.12 Wärmekraftmaschinen

Weiterhin folgt aus dem 2. Hauptsatz für die Änderung der Gesamtentropie der beiden Reservoir bei einem Zyklus:

$$\Delta S = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \geq 0.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_1 - W}{T_2} \geq 0,$$

und daher

$$\frac{W}{T_2} \leq Q_1 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Für den Wirkungsgrad

$$\eta := \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

erhalten wir demnach folgende obere Schranke:

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

3.3.3 Die Leistungszahl von Carnot-Kraftwärmemaschinen

Nun betrachten wir einen Umlauf $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
(entgegen dem Uhrzeigersinn).

Hier wird die mechanische Arbeit aufgewandt, um Wärmeenergie auszutauschen.

Für die Leistungszahl ϵ einer Kraftwärmemaschine gilt

$$\epsilon = \frac{|Q_{\text{Nutzen}}|}{|W_{\text{Aufwand}}|}.$$

Kältemaschinen

Nutzen:

Wärme, die bei der isothermen Expansion $4 \rightarrow 3$ ausgetauscht wird.

Der Wärmeaustausch ΔQ bei $4 \rightarrow 3$ beträgt

$$\Delta Q = \nu R T_3 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) = \nu R T_3 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

$|W_{\text{Aufwand}}|$ für eine Carnot-Kraftwärmemaschine ist gleich dem Wert von
 $|W_{\text{Nutzen}}|$ für eine Carnot-Wärmekraftmaschine.

Für die Leistungszahl erhalten wir daher

$$\epsilon = \frac{\nu R T_3 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_1 - T_3)} = \frac{T_3}{T_1 - T_3}.$$

Wärmepumpe

Nutzen:

Wärme, die bei der isothermen Kompression $2 \rightarrow 1$ ausgetauscht wird.

Der Wärmeaustausch ΔQ bei $2 \rightarrow 1$ beträgt

$$\Delta Q = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = -\nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Für die Leistungszahl erhalten wir daher

$$\epsilon = \frac{\nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_1 - T_3)} = \frac{T_1}{T_1 - T_3}.$$

3.3.4 Reversible Kreisprozesse

Wir nennen einen

- periodisch und
- reversibel arbeitenden thermischen Energiewandler, dessen
- Wärmeaustausch zwei Wärmereservoirs 1 und 2 nutzt

Carnot-Maschine und den

- zyklischen Prozess von Zustandsänderungen, den die Maschine hervorruft,

einen *Carnot-Kreisprozess*.

Angenommen, es gebe zwei Carnot-Wärmekraftmaschinen A und B mit

$$\eta_A > \eta_B,$$

dann könnten wir

- die Laufrichtung von B umkehren und
- B als Kältemaschine nutzen.

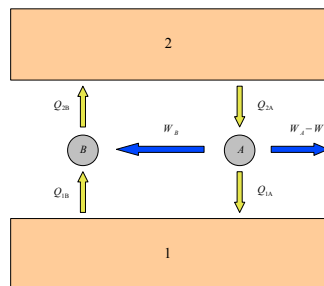


Abbildung 3.13 Wirkungsgrad reversibler Kreisprozesse

Bei jedem Zyklus würde die Wärmekraftmaschine A

- die Wärme $Q_{2,A}$ aus dem Reservoir 2 entnehmen,
- die Arbeit $W_A = \eta_A Q_{2,A}$ verrichten und
- die Wärme $Q_{1,A}$ an Reservoir 1 abgeben.

Entsprechend würde die Kältemaschine B

- die Wärme $Q_{1,B}$ aus dem Reservoir 1 entnehmen,
- die Arbeit W_B nutzen und
- die Wärme $Q_{2,B} = W_B \cdot \eta_B^{-1}$ an Reservoir 2 abgeben.

Wir können dabei annehmen, dass $Q_{2,B} = Q_{2,A}$ ist.

Nach unserer Annahme ist $\eta_A > \eta_B$ und daher

wäre die Arbeit W_B , die B nutzt kleiner als die Arbeit W_A , die A verrichtet.

Damit hätten wir insgesamt Arbeit verrichtet, indem wir lediglich das Reservoir 1 abgekühlt hätten. Da das jedoch gegen den 2. Hauptsatz verstößt, muss

$$\eta_A = \eta_B$$

sein und *alle Carnot-Prozesse* müssen den

gleichen Wirkungsgrad η_{rev}

haben.

Verzichten wir lediglich auf die Eigenschaft, dass die Maschine reversibel arbeitet, so erhalten wir *irreversibel* arbeitende Wärmekraft- bzw. Kraftwärmemaschinen C .

Wir nehmen an, dass

$$\eta_C > \eta_{rev}.$$

Ist C eine Wärmekraftmaschine, so können wir die Annahme wie oben zum Widerspruch führen.

Ist C eine Kraftwärmemaschine, so könnten wir A und C zusammenschalten, um eine Maschine zu erhalten, die

insgesamt zwar keine Arbeit verrichtet, aber ständig Wärme vom kalten zum warmen Speicher transportiert.

Das widerspricht allerdings dem 2. Hauptsatz.

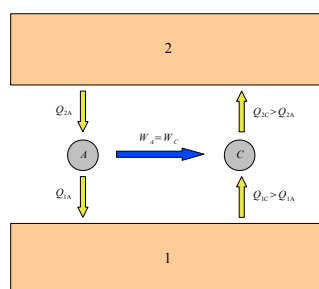


Abbildung 3.14 Wirkungsgrad irreversibler Kreisprozesse

Da die Konstruktion der Maschine unabhängig

- vom Verlauf des Prozesses und
- der Arbeitssubstanz ist,

können wir als Beispiel für den

Kreisprozess einer allgemeinen Carnot-Maschine

auch den

speziellen Carnot-Kreisprozess, bestehend aus zwei adiabatischen und zwei isothermen Prozessen,

heranziehen, um η_{rev} zu bestimmen.

3.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Ein ideales Gas, mit

$$R_i := \frac{R}{M_{mol}} = 288,2 \frac{J}{kg \cdot K}, \quad \gamma = 1,40,$$

und zwei Wärmereservoirs mit den Temperaturwerten $580^\circ C$ bzw. $20^\circ C$ werden für den Betrieb eines Stirling-Motors verwendet. Dabei durchläuft das Gas eine Kreisprozess mit folgenden Zustandsänderungen:

1 \rightarrow 2: Isotherme Expansion von $V_1 = 40 \text{ dm}^3$ auf $V_2 = 400 \text{ dm}^3$

2 \rightarrow 3: Isochore Abkühlung

3 \rightarrow 4: Isotherme Kompression von V_2 auf V_1

4 \rightarrow 1: Isochore Erwärmung

- Stellen Sie den Kreisprozess in einem p - V -Diagramm dar.
- Berechnen Sie die, für einen Umlauf, zu- und abgegebene Wärmeenergie und verrichtete Arbeit, falls die Gasmasse $m = 4,0 \text{ g}$ beträgt.
- Wie groß ist der thermische Wirkungsgrad?
- Vergleichen Sie den Wirkungsgrad mit dem eines Carnot-Prozesses zwischen den gleichen Temperaturen.
- Welcher thermische Wirkungsgrad ergibt sich, wenn die zur isochoren Erwärmung benötigte Wärmeenergie Q_{41} durch die, bei der isochoren Abkühlung freiwerdende Abwärme $Q_{23} = -Q_{41}$ gedeckt wird? Mit welcher Maßnahme im Aufbau des Stirling-Motors wird versucht, das zu realisieren?

Aufgabe 2

In einer Maschinenhalle wird bei vollem Betrieb pro Arbeitstag (8 h) eine Wärmemenge von $\Delta Q = 3,0 \cdot 10^9 \text{ J}$ erzeugt. Der Wärmeausgleich über Wände, Türen und Fenster soll vernachlässigt werden. Die Temperatur in der Halle wird mit Hilfe einer Carnot-Kältemaschine konstant auf $\vartheta_L = 20^\circ C$ gehalten werden. Die Warmseite der Kältemaschine liegt auf einem Temperaturniveau von $\vartheta_H = 30^\circ C$.

- Welche maximale Leistungszahl erreicht die Kältemaschine?

- b) Welche mechanische Arbeit W wird pro Umlauf verrichtet, wenn die Kältemaschine mit 30 Umdrehungen pro Minute betrieben wird?
- c) Welche elektrische Leistungsaufnahme hat der Motor, wenn er verlustfrei betrieben wird?
- d) Welche Wärmemenge wird pro Tag an der Warmseite abgegeben?
- e) Wie groß ist die Änderung der inneren Energie pro Umlauf?

Aufgabe 3

Der Kreisprozess eines Ottomotors wird idealisiert mit zwei isochoren und zwei adiabatischen Zustandsänderungen betrachtet:

1 \rightarrow 2: Adiabatische Kompression

2 \rightarrow 3: Isochore Erwärmung

3 \rightarrow 4: Adiabatische Expansion

4 \rightarrow 1: Isochore Abkühlung

- a) Zeichnen Sie das dazugehörige p - V -Diagramm.
- b) Der Motor hat einen Hubraum von $V_1 - V_2 = 2,0 \text{ l}$ und ein Kompressionsverhältnis von $\frac{V_1}{V_2} = 8$. Berechnen Sie das Anfangs- und Endvolumen V_1 und V_2 .
- c) Welche Temperatur und welchen Druck weist die Luft nach der adiabatischen Kompression auf, wenn sich anfangs 20°C warme Luft bei Normaldruck $p_1 = 1013 \text{ mbar}$ im Zylinder befindet (Freiheitsgrade von Luft: $f = 5$)?
- d) Bei welcher Zustandsänderung wird dem System Arbeit zugeführt? Berechnen Sie die Arbeit.
- e) Bei welcher Zustandsänderung wird vom System Arbeit abgegeben? Berechnen Sie die Arbeit, wenn die maximale Temperatur nach der isochoren Verbrennung $\vartheta_3 = 2000^\circ\text{C}$ beträgt?
- f) Berechnen Sie die Leistung des Motors bei einer Drehzahl von 5000 Umdrehungen pro Minute.
- g) Berechnen Sie den Wirkungsgrad des Motors.
- h) Drücken Sie den Wirkungsgrad allgemein als Funktion der verschiedenen Prozesstemperaturen aus. Zeigen Sie anschließend, mit Hilfe der Adiabatengleichungen, dass sich für den Wirkungsgrad η eines Ottomotors folgende Gleichung ergibt:

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}.$$

Aufgabe 4

Ein Kreisprozess bestehe aus folgenden zwei isochoren und isobaren Zustandsänderungen:

1 \rightarrow 2: Isochore Erwärmung

2 \rightarrow 3: Isobare Expansion

3 \rightarrow 4: Isochore Abkühlung

4 \rightarrow 1: Isobare Kompression

- a) Zeichnen Sie das dazugehörige p - V -Diagramm.
- b) Welche Arbeit wird pro Umlauf nach außen abgegeben, wenn der Hubraum $V_4 - V_1 = 3,0 \text{ l}$ und die Druckdifferenz $p_2 - p_1 = 10 \text{ bar}$ betragen?
- c) Wird bei der isobaren Kompression Wärmeenergie an die Umgebung abgegeben oder Wärmeenergie dem System zugeführt?
- d) Welche Wärmeenergie ΔQ_{41} wird pro Mol eines 2-atomigen Gases mit der Umgebung ausgetauscht, wenn die Temperaturdifferenz $\Delta T = 100 \text{ K}$ beträgt?
- e) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie ΔU pro Umlauf.

Aufgabe 5

Ein Kühlschrank steht in einer 21°C warmen Küche und weist eine Innenraumtemperatur von 4°C auf. Der Kühlschrank hat eine Oberfläche von $1,5 \text{ m}^2$. Der Wärmedurchgangskoeffizient beträgt $\alpha_K = 1 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$.

- a) Wie groß ist der Wärmestrom in den Kühlschrank?
- b) Wie groß ist die Leistungsaufnahme des Kühlschranks, wenn es sich um eine ideale Carnot-Maschine handelt?
- c) Welche Arbeit muss dem Kühlschrank in Summe pro Stunde zugeführt werden?
- d) Welche Verlustwärme des Carnotprozesses wird pro Stunde an der Rückwand des Kühlschranks abgegeben? Ist die Verlustwärme des Carnotprozesses größer oder kleiner als der Wärmestrom durch die Oberfläche?

4 Wärmetransport

Wärmeenergie kann durch

- Strahlung,
- Leitung oder
- Strömung

transportiert werden.

Wärmestrahlung ist eine Form der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Wärmeleitung erfolgt durch die Energieübertragung durch Impulse im Rahmen einer statistischen Molekülbewegung.

Dabei muss die Molekülenergie örtlich variieren, d.h. ein Temperaturgefälle vorliegen.

Wärmeströmung ist gegeben bei makroskopischem Materie- und Wärmetransport.

4.1 Wärmeleitung

Wärme strömt in Richtung eines Temperaturgefälles.

Die *Stärke des Wärmestroms* P und die der Wärmestromdichte \vec{j} hängen dabei vom Temperaturgradienten

$$\text{grad } T = \vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

ab.

Der Wärmestrom P ist definiert durch

$$P := \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Betrachten wir den Wärmestrom, der durch ein Flächenelement $A \subset \partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tritt, so erhalten wir

$$P = - \int_A (\vec{j}, \vec{\nu}) d\omega.$$

Dabei bezeichnet \vec{j} die Wärmestromdichte und $\vec{\nu}$ den äußeren Normalenvektor auf A .

Zwischen Wärmestromdichte \vec{j} und dem Temperaturgradienten $\text{grad } T$ besteht der Zusammenhang

$$\vec{j} = -\lambda \text{ grad } T.$$

Dabei ist λ eine Materialkonstante, die *Wärmeleitfähigkeit*. Die Wärmestromdichte \vec{j} und der Temperaturgradient $\text{grad } T$ lassen sich folgendermaßen darstellen:

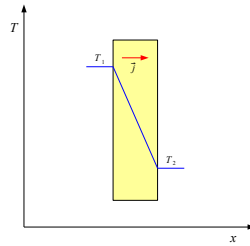


Abbildung 4.1 Wärmeleitung bei konstanter Wärmeleitfähigkeit

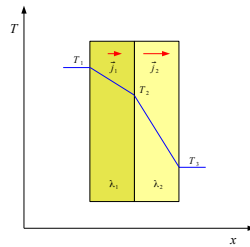


Abbildung 4.2 Wärmeleitung

Der Betrag der Wärmestromdichte \vec{j} ist proportional dem Betrag des Temperaturgradienten.

Existieren Wärmequellen oder Wärmesenken, so bilanzieren wir, die zeitliche Änderung des Wärmehalts Q eines Volumens dV mittels

$$\text{div } \vec{j} \cdot dV = -\frac{\partial Q}{\partial t},$$

wie sich nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{j} \cdot d^3x = \int_{\partial\Omega} (\vec{j}, \vec{\nu}) \cdot d\omega$$

zeigt. Für die spezifische Wärmekapazität $c = c_V$ gilt

$$c = \frac{1}{m} \left(\frac{d'Q}{dT} \right)_V.$$

Daher erhalten wir

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \cdot c \rho \cdot dV$$

und somit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \operatorname{div} \vec{j}.$$

Insgesamt haben wir nun die homogene *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = 0$$

hergeleitet.

Anmerkung: Δ ist hier der Laplace-Operator, d.h.

$$\Delta := \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

| Wärmeleitfähigkeit einiger Stoffe | | |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------------------|
| | Temperatur in °C | λ in $Wm^{-1}K^{-1}$ |
| Silber | [-100, 100] | 420 |
| Kupfer | [0, 100] | 390 |
| Aluminium | [0, 200] | 230 |
| Platin | [-100, 100] | 71 |
| Blei | 0 | 36 |
| | 200 | 33 |
| Quarzglas | [0, 100] | 1,4 |
| Seide | 0 | 0,04 |
| Helium | 0 | 0,14 |
| | 100 | 0,17 |
| Luft | 0 | 0,024 |
| | 100 | 0,031 |
| Wasser | 0 | 0,54 |
| | 100 | 0,67 |

Tabelle 4.1 Die Wärmeleitfähigkeit λ

Anmerkungen zur Wärmeleitungsgleichung

Die homogene Wärmeleitungsgleichung lautet:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = 0$$

- Die in dieser partiellen Differentialgleichung auftretende Größe

$$\frac{\lambda}{\rho c}$$

heißt *Temperatur-Leitwert*. Dieser Wert bestimmt die Zeit, die zum Temperatúrausgleich benötigt wird.

- Die (inhomogene) Wärmeleitungsgleichung erlaubt eine Analyse der Temperaturverteilung bei zusätzlichen Wärmequellen oder Wärmesenken.

Betrachten wir nun die stationäre Wärmeverteilung eines Volumenelements V einer Wand.

- Dabei habe die eine Wandfläche die Temperatur T_1 , die andere die Temperatur $T_2 < T_1$.
- Das Volumen V sei $V = A \cdot d$, wobei A die Querschnittsfläche und d die Schichtdicke sei.

Mit der Wärmestromdichte

$$\vec{j} = -\lambda \operatorname{grad} T$$

können wir den Betrag des Wärmestromes

$$P = jA$$

umformen zu

$$P = A\lambda \frac{T_1 - T_2}{d}.$$

Wir definieren den Wärmewiderstand R_{th} nun folgendermaßen:

$$R_{th} := \frac{T_1 - T_2}{P}$$

und erhalten für unser Beispiel

$$R_{th} = \frac{d}{A \cdot \lambda}.$$

Besteht die Wand ausschließlich

- aus ebenen Schichten i
- der Dicke d_i
- mit jeweils gleichem Schichtquerschnitt A ,

so zeigt sich, dass sich der gesamte Wärmewiderstand $R_{th,ges}$ additiv aus den einzelnen Wärmewiderständen $R_{th,i}$ zusammensetzt, d. h.

$$R_{th,ges} = \sum_i R_{th,i}.$$

Dieses Ergebnis für $R_{th,ges}$ erhalten wir, wenn wir beachten, dass für den Wärmestrom $P_i = P_j = P_{ges}$ gilt und

$$P_{ges} = \frac{T_1 - T_n}{R_{th,ges}} = \frac{(T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_4) + \dots + (T_{n-1} - T_n)}{R_{th,ges}}$$

$$= \frac{P_{ges} \cdot R_{th,1} + P_{ges} \cdot R_{th,2} + \dots + P_{ges} \cdot R_{th,n-1}}{R_{th,ges}}.$$

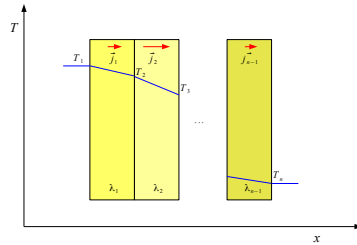


Abbildung 4.3 Temperaturverteilung in einer inhomogenen Wand

Den Temperaturverlauf bestimmen wir folgendermaßen:

Gemäß

$$P_{ges} = \frac{T_1 - T_n}{R_{th,ges}} = P_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,1}} = P_i = \frac{T_i - T_{i+1}}{R_{th,i}}$$

gilt

$$T_i - T_{i+1} = \frac{R_{th,i}}{R_{th,ges}} \cdot (T_1 - T_n).$$

Für ein homogenes Material ist $\lambda_i = \lambda_j$ und

$$\frac{R_{th,i}}{R_{th,ges}} = \frac{d_i}{d}$$

Innerhalb der homogenen Wand können wir linear interpolieren und erhalten

$$T(x) = T_1 - \frac{x}{d}(T_1 - T_2).$$

Andererseits können wir in unserem Wandmodell auch die Querschnittsfläche A so unterteilen, dass

- sich A additiv aus Teilflächen A_i zusammensetzt und
- sich der Wärmestrom P additiv aus Wärmeströmen P_i zusammensetzt, wobei sich
- P_i innerhalb eines Volumens V_i befindet und
- für das das Volumen V_i

$$V_i = A_i \cdot d$$

gilt.

Die Temperatur der Wandflächen sei wieder T_1 und $T_2 < T_1$.
Dann erhalten wir

$$P_i = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,i}}$$

und mit

$$P_{th,ges} = \sum_i P_{th,i}$$

schließlich

$$\frac{1}{R_{th,ges}} = \sum_i \frac{1}{R_{th,i}}.$$

4.2 Wärmestrahlung

Die temperaturabhängige Strahlung eines Körpers wird als *Wärmestrahlung* bezeichnet.

Die Strahlungsfrequenz ist dabei

- abhängig von der Temperatur des Körpers
- und der Beschaffenheit seiner Oberfläche,
- aber unabhängig von der Temperatur der Umgebung.

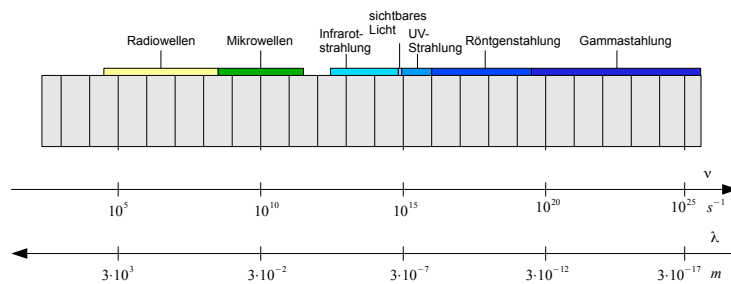


Abbildung 4.4 Das elektromagnetische Spektrum

Thermisches Gleichgewicht herrscht, wenn emittierte und absorbierte Strahlungsleistung gleich sind.

Körper, die alle auffallende Strahlungsenergie absorbieren und vollständig in Wärme verwandeln, bezeichnet man

- als *absolut schwarze Körper*,
- die emittierte Strahlung als *schwarze Strahlung* oder *Hohlraumstrahlung*.

Das Plancksche Strahlungsgesetz

Die *spektrale Energiedichte* $\rho = \rho(\nu, T)$ der Hohlraumstrahlung, als Funktion der Strahlungsfrequenz ν und der Temperatur T , genügt, im thermischen Gleichgewicht und für feste Polarisationsrichtung, dem *Planckschen Strahlungsgesetz*:

$$\rho(\nu, T) = \frac{4\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

In folgender Abbildung ist ρ als Funktion $\rho = \rho(\nu)$, parametrisiert für T , dargestellt:

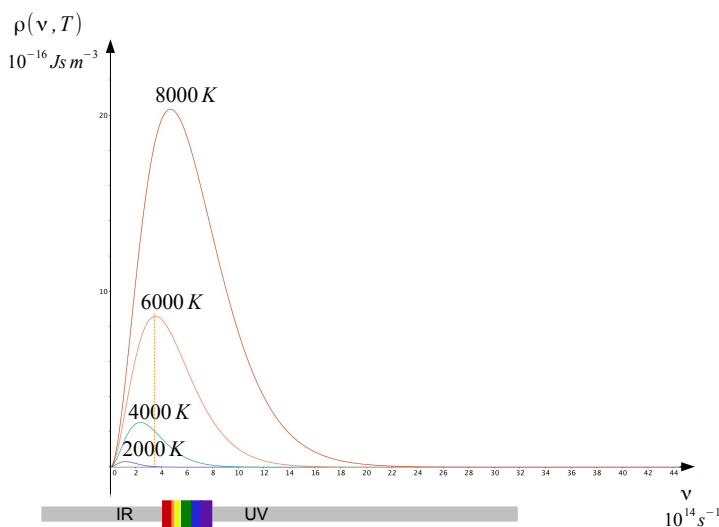


Abbildung 4.5 Die spektrale Energiedichte $\rho(\nu, T)$

Das **Wiensche Verschiebungsgesetz** gibt an, bei welcher Frequenz ν_m oder Wellenlänge λ_m das Maximum der Energiedichte der Hohlraumstrahlung liegt.

Der Wert λ_m beträgt

$$\lambda_m = w \cdot T^{-1},$$

wobei $w = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$. Dieses Ergebnis lässt sich folgendermaßen aus dem Planckschen Strahlungsgesetz herleiten:

Da

$$\frac{d}{d\nu} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{3\nu^2(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) - \nu^3 e^{\frac{h\nu}{kT}} \frac{h}{kT}}{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^2} = \frac{\nu^2}{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^2} \left(3(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) - \frac{h\nu}{kT} \right),$$

ergibt eine numerische Rechnung

$$\nu_m = 5,879 \cdot 10^{10} s^{-1} \cdot K^{-1} \cdot T.$$

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die Strahlungsleistung P des schwarzen Körpers, die er pro Flächeneinheit seiner Oberfläche emittiert, lässt sich berechnen durch

$$P \sim \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu \sim T^4.$$

Das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* lautet

$$P = \sigma T^4,$$

wobei für die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ gilt. Bei der Berechnung des vorangegangenen Integrals lässt sich die Substitution

$$u := \frac{h\nu}{kT}$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du$$

nutzen.

Hat der Körper die Temperatur T_1 , die Oberfläche A und seine Umgebung die Temperatur $T_2 < T_1$, so ist die resultierende Strahlungsleistung gegeben durch

$$P = A\sigma(T_1^4 - T_2^4).$$

Da wir auch hier

$$R_{th} := \frac{T_1 - T_2}{P}$$

setzen, folgt

$$R_{th} = \frac{1}{A\sigma} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1^4 - T_2^4}.$$

Der *Wärmetransport* zwischen einem festen Körpern und einem Fluid lässt sich allgemein, d. h. nicht nur im Falle des Wärmestrahlung, durch die *Wärmeübergangszahl* α charakterisieren.

Diese ist definiert durch:

$$\alpha := \frac{j}{T_1 - T_2}.$$

Falls der Wärmestrom \vec{j} in Richtung des Normalenvektors der Randfläche weist, ergibt sich

$$P = jA = \alpha A(T_1 - T_2)$$

und für den thermischen Widerstand R_{th} :

$$R_{th} = \frac{1}{\alpha A}.$$

Gilt $T_1 = T_2 + \vartheta$ mit $\vartheta \ll T_2$, so erhalten wir

$$T_1^4 - T_2^4 = (T_2 + \vartheta)^4 - T_2^4 \approx 4T_2^3 \vartheta.$$

In diesem Fall gilt für die Wärmestrahlung

$$\alpha \approx 4\sigma T_2^3.$$

Bei $T \approx 300\text{ K}$ ergibt sich

$$4\sigma T_2^3 \approx 6\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}.$$

Handelt es sich nicht um einen schwarzen Strahler,

- so wird lediglich ein Bruchteil dieser Leistung emittiert und
- das Emissionsvermögen der Oberfläche muss in Betracht gezogen werden.

Für den Emissionsgrad ϵ dieser Körper gilt daher $\epsilon < 1$.

4.3 Konvektion

Die Strömung in einer Flüssigkeit mit ungleichmäßiger Temperaturverteilung wird als *Konvektion* bezeichnet. Bei einer nicht-konstanten Temperaturverteilung unterscheiden wir folgende Fälle:

- Ist das mechanische Gleichgewicht stabil, so tritt *keine* Strömung auf, die Temperaturunterschiede ausgleicht. Ein Fluid kann im *mechanischen Gleichgewicht* sein, d. h. keine makroskopische Bewegung aufweisen, ohne dabei im *thermischen Gleichgewicht* zu sein.
- Ist das mechanische Gleichgewicht instabil oder liegt kein mechanisches Gleichgewicht vor, so tritt eine Strömung auf, die Temperaturunterschiede ausgleicht.

In Flüssigkeiten und Gasen ist der *konvektive Wärmetransport* oft wesentlich effektiver als der Wärmetransport mittels Wärmeleitung. Die Konvektion kann auch sehr regelmäßige Strukturen, beispielsweise Konvektionsrollen ausbilden:

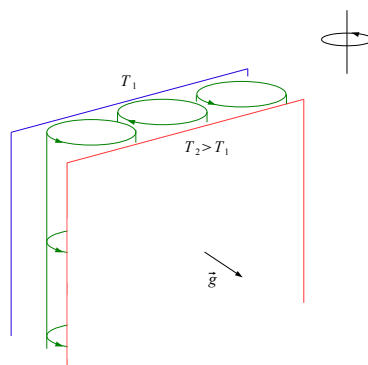


Abbildung 4.6 Konvektionsrollen

Freie Konvektion

Die freie Konvektion wird durch lokale Temperatur- und damit Dichteunterschiede verursacht. Ist ein Fluid, unter dem Einfluss des Schwerfelds, nicht im thermischen Gleichgewicht, aber

- im mechanischen Gleichgewicht, so stellt sich eine von der Höhe z abhängige Temperaturverteilung $T = T(z)$ ein,
- nicht im mechanischen Gleichgewicht, so tritt eine Strömung auf, die die Temperaturunterschiede ausgleicht. Diese Strömung wird als *freie Konvektion* bezeichnet.

4.4 Diffusiver Wärmetransport

Ist die Teilchenzahldichte inhomogen und wird der Konzentrationsgradient durch Teilchenströme ausgeglichen, so wird dieser Transportvorgang *Diffusion* genannt.

Zwar wird

- der Diffusionsstrom vom Konzentrationsgradienten und
- der Wärmestrom vom Temperaturgradienten

verursacht, jedoch hängen im Allgemeinen beide Ströme von beiden Gradienten ab.

4.5 Wärmeübergang und Wärmedurchgang

Unter *Wärmeübergang* verstehen wir den Wärmetransport zwischen einem Körper der Temperatur T_1 und der Umgebung mit der Temperatur T_2 .

Dabei geht von dem Körper die Wärmeleistung

$$P = \alpha A (T_1 - T_2)$$

an die Umgebung über.

Anmerkung

Sind T_2 und die Wärmeübergangszahl α konstant und fehlt ab $t = t_0$ eine weitere Wärmezufuhr, so kühlt der Körper gemäß

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{1}{cm} P = -\tau^{-1} (T_1 - T_2)$$

für $t > t_0$ ab. Dabei ist $\tau := \frac{cm}{\alpha A}$.

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung führt auf *Newtons Abkühlungsgesetz*

$$T_1(t) - T_2 = (T_1(t_0) - T_2) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Wir berechnen den *Wärmedurchgang* durch eine Platte zwischen zwei Medien der Temperaturen T_1 bzw. T_2 mittels

$$P = kA(T_1 - T_2).$$

Der Wert kA wird als Wärmeleitwert, der Wert

$$R_{th} := \frac{1}{kA}$$

als Wärmewiderstand dieses Wärmedurchgangs bezeichnet.

Unter der Annahme, dass der Wärmedurchgang aus

- einem Wärmeübergang "Medium 1 - Platte",
- einer Wärmeleitung durch die Platte
- und einem Wärmeübergang "Platte - Medium 2"

besteht, erhalten wir für den Wärmewiderstand dieses Wärmedurchgangs

$$R_{th} = \frac{1}{kA} = \frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{d}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A}.$$

Dabei sind d die Plattendicke und α_i die jeweiligen Wärmeübergangszahlen.

Oft wird ein konvektiver Wärmetransport durch einen Strahlungstransport begleitet.

Den gesamten thermischen Widerstand R_{th} dieses Prozesses berechnen wir dann mittels

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th,K}} + \frac{1}{R_{th,S}},$$

wobei $R_{th,K}$ den Wärmewiderstand der Konvektion und $R_{th,S}$ den des Strahlungstransports bezeichnet.

4.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Die Enden eines an der Mantelfläche isolierten Stabes stehen in Kontakt mit zwei Wärmebädern der Temperatur $T_1 = 280,0\text{ K}$ und $T_2 = 360,0\text{ K}$. Der Stab hat eine Länge von zehn und einen Radius von zwei Zentimetern und transportiert infolge von Wärmeleitung eine thermische Leistung von $91,5\text{ W}$ zwischen den Wärmebädern.

- Berechnen Sie die pro Minute transportierte Wärmeenergie.
- Welche Wärmeleitfähigkeit hat das Stabmaterial?

Aufgabe 2

Ein Halbleiterbauelement wird bei einer Umgebungstemperatur von $20,5^\circ\text{C}$ betrieben. Der thermische Widerstand für die Wärmeleitung vom Chip im Inneren zur Gehäuseaußenwand beträgt $R_{th,L} = 30,3\text{ K/W}$ und der thermische Widerstand des Wärmeübergangs vom Gehäuse zur Luft $R_{th,U} = 769,3\text{ K/W}$. Wärmestrahlung wird vernachlässigt. Welche Temperatur erreicht der Chip bei einer Leistungsaufnahme von $0,1\text{ W}$?

Aufgabe 3

Die Gehäusetemperatur eines elektronischen Bauelements, in dem 200 mW elektrische Leistung in Wärme umgesetzt werden, soll mit einem Kühlkörper durch Wärmestrahlung ($\epsilon = 0,9$) und natürliche Konvektion ($\alpha_K = 5\text{ W/m}^2\text{K}$) auf einem Wert von 20 K über der Umgebungstemperatur (20°C) gehalten werden.

Hinweis: Die Stefan-Boltzmann-Konstante beträgt $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}\text{ W/(m}^2\text{K}^4)$.

- Berechnen Sie den erforderlichen Wärmewiderstand des Kühlkörpers.
- Welche Oberfläche muss der Kühlkörper haben (Angabe in cm^2)?
- Auf welche Temperatur erwärmt sich das Innere des Bauelements, wenn der Wärmewiderstand zwischen Inneren des Bauteils und dem Gehäuse 20 K/W beträgt?

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie den Wärmedurchgangskoeffizienten (U -Wert, früher k -Wert) für folgende Mehrschichtsysteme:

- (i) 6 mm Innenputz ($\lambda_{PI} = 0,70 \text{ W/(mK)}$) und 36,5 cm Hohllochziegel ($\lambda_Z = 0,12 \text{ W/(mK)}$) und 15 mm Außenputz ($\lambda_{PA} = 0,70 \text{ W/(mK)}$),
- (ii) 6 mm Innenputz ($\lambda_{PI} = 0,70 \text{ W/(mK)}$) und 17,5 cm Kalksandstein ($\lambda_Z = 0,33 \text{ W/(mK)}$) und 16 cm Wärmedämmverbundsystem ($\lambda_{WD} = 0,035 \text{ W/(mK)}$) und 15 mm Außenputz ($\lambda_{PA} = 0,70 \text{ W/(mK)}$).

In beiden Fällen soll der Wärmeübergangskoeffizient an der Außen- und Innenseite der Wand $\alpha_{au\ddot{a}u\ddot{e}n} = 23 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ und $\alpha_{innen} = 8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ betragen.

b) Welcher Wärmestrom ergibt sich jeweils bei einer Außenwandfläche von 250 m^2 , einer Innentemperatur von 21°C und einer Außentemperatur von 0°C ?

Aufgabe 5

Eine Fensterscheibe der Größe $1,00 \text{ m}^2$ aus Glas (Dicke $d = 4,0 \text{ mm}$, $\lambda = 0,76 \text{ W/(mK)}$) ist auf einer Seite einer kalten Windströmung ausgesetzt (Wärmeübergangskoeffizient im Wind: $20 \text{ W/(m}^2\text{K)}$). Auf der Innenseite der Scheibe beträgt der Wärmeübergangskoeffizient $5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. Die Wärmestrahlung wird vernachlässigt.

- a) Wie groß sind der Wärmewiderstand und der Wärmestrom durch die Scheibe, wenn innen auf 20°C geheizt wird und die Außentemperatur -10°C beträgt?
- b) Die Dicke der Scheibe wird verdoppelt. Wie groß ist jetzt der Wärmestrom?
- c) Die Scheibe wird jetzt durch eine Doppelscheibe ersetzt. Die Temperatur- und Windverhältnisse bleiben unverändert. Welcher Wärmewiderstand ergibt sich für die zweite Scheibe? Welcher Wert ergibt sich jetzt für den Wärmestrom durch beide Scheiben? Dabei soll die Wärmeleitung in der Luftschicht zwischen den Scheiben vernachlässigt werden. Die noch nicht erklärten Wärmeübergangskoeffizienten sollen gleich $5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ sein.
- d) Warum werden Scheiben beispielsweise mit Argon befüllt? Warum kann eine Metallbedampfung sinnvoll sein?

Literatur

- [1] C. Gerthsen, H. O. Kneser, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, VI, Hydrodynamik, Akademie Verlag
- [3] F. Reif, *Statistische Physik und Theorie der Wärme*, W. de Gruyter
- [4] A. Sommerfeld, *Thermodynamik und Statistik*, Verlag Harri Deutsch